

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

A EQUAÇÃO DE KEPLER POR BESSEL E FOURIER

ROGER BEHLING

Florianópolis/SC

Fevereiro de 2004

ROGER BEHLING

A EQUAÇÃO DE KEPLER POR BESSEL E FOURIER

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado no Curso de Matemática para obtenção do
Grau de Licenciado em Matemática, na Universidade
Federal de Santa Catarina.

Orientador: Prof. Antônio Vladimir Martins

Florianópolis/SC

Fevereiro de 2004

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria número 14 SCG/04.

Prof^a. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da Disciplina

Banca Examinadora:

Prof. Antônio Vladimir Martins (Orientador)

Prof. Nereu Estanislau Burin

Prof. Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa

AGRADECIMENTOS

A Deus e a seu filho Jesus Cristo, pela ótima vida que me proporcionam.

Aos meus pais, Hans e Marilise Behling, ao meu irmão e melhor amigo Ronan e a minha amada namorada Nina, por todo amor e compreensão .

Aos meus amigos, parentes e companheiros em geral, e em especial a Fábio Whutke que sempre esteve ao meu lado, mesmo agora que já não mais está entre nós.

A todos os professores que já tive pela sabedoria e conhecimento adquiridos, em particular ao professor Vladimir pela sua profunda colaboração na minha formação acadêmica.

As secretárias Sílvia e Iara, pelo carisma e simpatia

“Todo homem morre, mas nem todo homem vive de verdade.”
(extraído do filme Coração Valente)

Índice

Introdução	7
1. Elipse em Coordenadas Polares	8
1.1. Definição, conceitos e a equação da elipse em coordenadas cartesianas, na posição padrão	8
1.2. Equação da elipse em coordenadas polares	10
1.3. Excentricidade da Elipse.....	12
2. Johannes Kepler	14
3. As três Leis de Kepler	20
3.1. Primeira Lei de Kepler (Lei das órbitas)	20
3.2. Segunda Lei de Kepler (Lei das áreas)	26
3.3. Terceira Lei de Kepler (Lei dos Períodos).....	27
3.4. Observações sobre a validade das três leis de Kepler	29
3.5. Satélites Artificiais	31
3.6. Velocidade de Escape.....	33
3.7. Exercícios Resolvidos com aplicações das leis de Kepler	35
4. Séries de Fourier	37
4.1. Condução de calor e Jean B. J. Fourier.....	37
4.2. Definição da Série de Fourier.....	37
5. Equação de Kepler	46
5.1. Relação entre anomalia excêntrica e anomalia verdadeira	46
5.2. Dedução da equação de Kepler.....	48
5.3. Solução da equação de Kepler	50
5.4. Biografia de Friedrich Wilhelm Bessel, vida e obra.....	53
Considerações Finais.....	57
Referências Bibliográficas	Erro! Indicador não definido.

Introdução

Três nomes muito importantes da história da humanidade aparecem no título deste trabalho. Kepler, Bessel e Fourier foram homens que contribuíram muito na história humana. Graças a Fourier, por exemplo, exames de ressonância magnética são possíveis, e graças a estes minha mãe está viva atualmente.

Nesta monografia foram estudadas as biografias de Kepler, Fourier e Bessel bem como alguns de seus trabalhos. Deduziu-se a fórmula da elipse em coordenadas polares para dar base à demonstração das leis de Kepler do movimento planetário. Sobre estas foram feitos comentários e estudos de algumas aplicações. A equação de Kepler, importante em mecânica celeste, é uma equação cuja solução já foi encontrada por mais de cem métodos distintos. Ela foi resolvida no último capítulo com o auxílio das séries de Fourier e funções de Bessel.

Newton é também um personagem de grande relevância por causa da criação do cálculo diferencial e integral, suas fortes contribuições no estudo de forças centrais tendo enunciado as três leis fundamentais da mecânica e a lei da gravitação universal.

O presente trabalho é interdisciplinar por tratar de temas matemáticos, físicos e da própria história. Os gregos, por intermédio de Ptolomeu, fizeram vários estudos do céu e do universo em geral, várias pessoas vêm modernizando estudos direcionados a ponto de se enviar robôs a outros planetas. Nesse sentido, esta monografia tem um caráter bem simples, contudo é rica em aplicações matemáticas, muitas não vistas no curso de licenciatura em matemática.

1 Elipse em Coordenadas Polares

1.1 Definição, conceitos e a equação da elipse em coordenadas cartesianas, na posição padrão

Uma elipse é o conjunto de todos os pontos no plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixados é uma constante positiva dada, sendo maior do que a distância entre os dois pontos. Os dois pontos fixados são chamados de **focos** da elipse, e o ponto médio do segmento que une os focos é chamado de **centro**. O segmento de reta que contém os focos e possui extremidades na própria elipse é chamado de **eixo maior**, denotado por a , já o segmento que atravessa o centro da elipse, é perpendicular ao **eixo maior** e tem extremidades na mesma chama-se **eixo menor** denotado por b (figura 1):

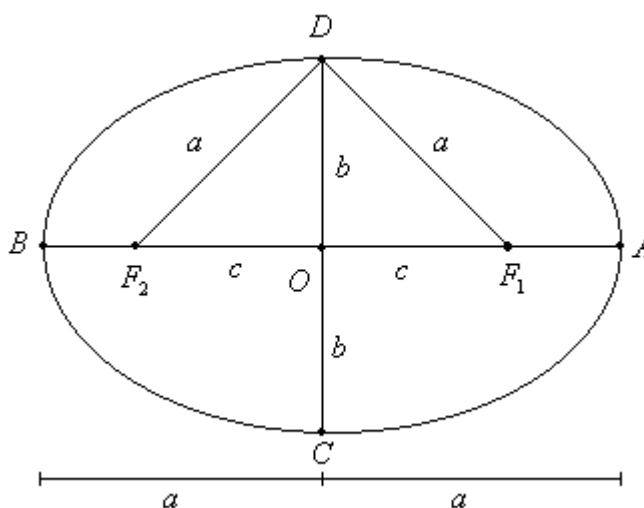


Figura 1. A elipse como lugar geométrico.

É tradicional no estudo das elipses denotar o eixo maior por $2a$, o comprimento do eixo menor por $2b$, e a distância dos focos por $2c$. Há uma relação básica entre os números a , b e c que pode ser obtida examinando a soma das distâncias aos focos a partir do ponto C na extremidade do eixo maior, e do ponto A na extremidade do eixo menor. A partir da definição de elipse essas somas devem ser iguais, segue então que:

$$2\sqrt{b^2 + c^2} = (a - c) + (a + c) \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (\text{ver figura 1}) \quad (1.1)$$

No que segue obter-se-á a equação da elipse em coordenadas cartesianas. Para tanto, toma-se o centro da elipse como sendo a origem do plano cartesiano, com o eixo maior sobre o eixo x e o eixo menor sobre o eixo y .

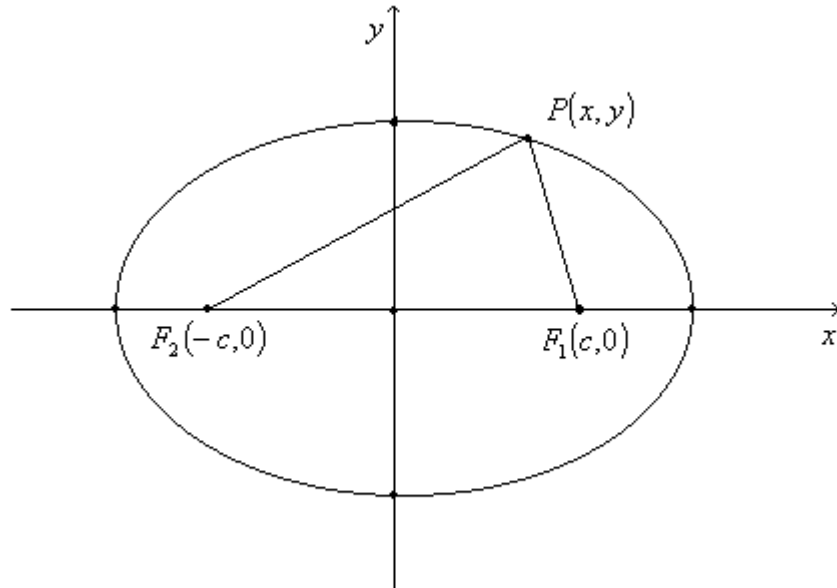


Figura 2.: A elipse e suas componentes em coordenadas cartesianas.

Pela definição de elipse tem-se que $PF_1 + PF_2 = 2a$ (ver figura 2).

Logo

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (1.2)$$

Transpondo o segundo radical para o lado direito da equação e elevando ao quadrado, obtém-se:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x \quad (1.3)$$

Elevando ao quadrado outra vez e simplificando tem-se:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad (1.4)$$

Mas $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2$, então:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.5)$$

que é a equação da elipse em coordenadas polares.

1.2 Equação da elipse em coordenadas polares

Para deduzir a primeira lei de Kepler, objetivo posterior, é necessário acharmos a equação da elipse em coordenadas polares, e neste processo de mudança de coordenadas percebe-se que é conveniente transladar um dos focos da elipse para a origem O do plano cartesiano, como segue na figura 3:

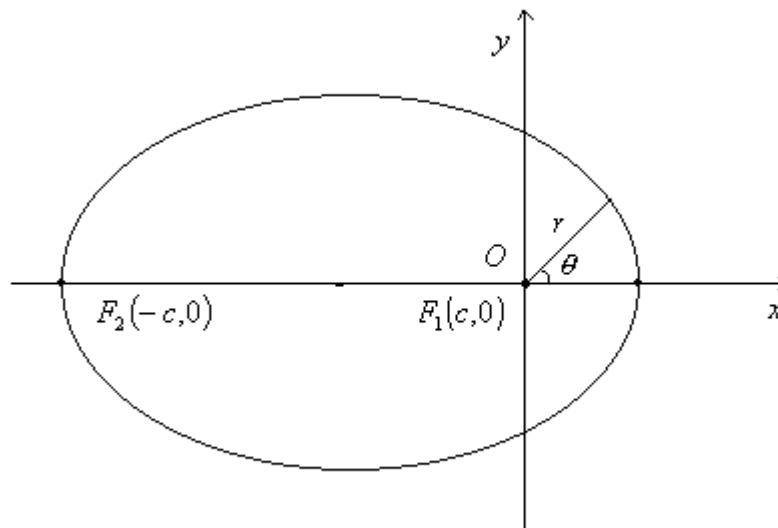


Figura 3.: A elipse e suas componentes em coordenadas polares.

Ocorre então que a equação da elipse acima em coordenadas cartesianas devido à translação no eixo x será:

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.6)$$

Seja agora:

(i) $e = \frac{c}{a}$ onde e é a **excentricidade** da elipse;

$$(ii) L = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2).$$

Considerando a equação anterior, o fato de $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, com $r \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, no sistema de coordenadas polares e as constantes e e L definidas em (i) e (ii) pode-se deduzir a equação da elipse em coordenadas polares como segue:

$$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 2xc + c^2 - c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} - 1 = 0 \quad (1.7)$$

Organizando convenientemente (1.7) obtém-se:

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} - \frac{c^2 x^2}{b^2 a^2} + \frac{2xc}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} \quad (1.8)$$

Usando agora que $r^2 = x^2 + y^2$ e substituindo em (1.8) tem-se:

$$\frac{r^2}{b^2} = \left(\frac{xc}{ba}\right)^2 - 2\frac{xc}{ba} \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{r^2}{b^2} = \left(\frac{xc}{ba} - \frac{b}{a}\right)^2 \Rightarrow r = \pm \left(\frac{xc}{a} - \frac{b^2}{a}\right) \quad (1.9)$$

Como $e = c/a$ (excentricidade) e $L = b^2/a = a(1 - e^2)$ tem-se:

$$r = \pm \left(\frac{xc}{a} - \frac{b^2}{a}\right) \Rightarrow r = \pm(xe - L) \quad (1.10)$$

Analisando os dois casos verificamos:

$$(i) r = +(xe - L) \Rightarrow r = e.r \cos \theta - L \Rightarrow r(1 - e \cos \theta) = -L \Rightarrow r = \frac{L}{e \cos \theta - 1}$$

$$(ii) r = -(xe - L) \Rightarrow r = -e.r \cos \theta + L \Rightarrow r(1 + e \cos \theta) = L \Rightarrow r = \frac{L}{1 + e \cos \theta}$$

Mas quer-se por convenção $r \geq 0$, para isto basta estudar o sinal de “ $e \cos \theta - 1$ ” e “ $1 + e \cos \theta$ ” pois $L = \frac{b^2}{a} \geq 0$. Para fazer este estudo considerar-se-á os seguintes itens:

- a) $0 < e < 1$, pois $0 < c < a$;
- b) $-1 \leq \cos \theta \leq 1, \forall \theta \in [0, 2\pi]$.

Por (a) e (b) consegue-se concluir que:

$$1^\circ: e \cos \theta \leq e < 1 \Rightarrow e \cos \theta < 1 \Rightarrow e \cos \theta - 1 < 0$$

$$2^\circ: -e \leq e \cos \theta \Rightarrow 0 \leq e \cos \theta + e < e \cos \theta + 1 \Rightarrow 1 + e \cos \theta > 0$$

Portanto, o raio polar considerado é:

$$r = \frac{L}{1 + e \cos \theta} \tag{1.11}$$

Obs: É possível mostrar que tanto para círculos, parábolas e hipérbolas vale o raio polar anterior. Entretanto, tem-se valores apropriados da excentricidade para cada cônica, como comentado mais à frente no trabalho.

1.3 Excentricidade da Elipse

Já foi visto que a excentricidade da elipse é a razão entre c e a , ou seja $e = \frac{c}{a}$. O

filme de excentricidades a seguir (figura 4) dá uma interpretação geométrica do significado da excentricidade de uma elipse.

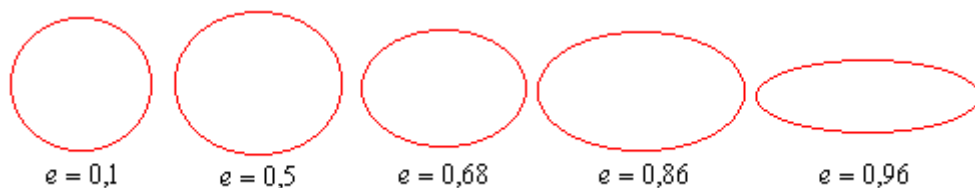


Figura 4.: Filme de excentricidades.

Conclui-se que quando $e \rightarrow 0$ (e tende a zero) a elipse tende a ser um círculo. Caso $e \rightarrow 1$ (e tende a um) a elipse tende a achatar-se cada vez mais virando no limite uma reta. Diz-se que quanto mais perto de um for a excentricidade em questão mais excêntrica é a elipse.

A seguir é exibida uma tabela das excentricidades das órbitas dos planetas do sistema solar. É curioso o fato de que todos os planetas tenham uma excentricidade relativamente baixa.

Excentricidade da órbita dos planetas

Planeta	Excentricidade
Mercúrio	0,2
Vênus	0,007
Terra	0,02
Marte	0,09
Júpiter	0,05
Saturno	0,06
Urano	0,05
Netuno	0,009
Plutão	0,25

Tabela 1.

Pela tabela anterior é possível perceber que a órbita da Terra possui uma excentricidade muito baixa. Neste sentido, existem evidências observacionais da baixa excentricidade da órbita da Terra. Uma evidência de que a órbita da Terra não é tão achatada (excêntrica) quanto aparece nos livros didáticos é o fato de vermos o Sol sempre com o mesmo tamanho. Se a órbita da Terra fosse tão excêntrica quanto, por exemplo, $e = 0,8$ ou $e = 0,9$, teríamos que ver o tamanho aparente do Sol mudar ao longo do ano. Quando próximo dele deveríamos vê-lo enorme (e morreríamos de calor) e quando distante dele o veríamos pequeno e morreríamos congelados (os dois hemisférios da Terra simultaneamente). Além disso, quando próximo teríamos marés enormes e quando distante teríamos somente as marés devido à atração gravitacional da Lua. As órbitas da figura 4 com, $e = 0,5$ até $e = 0,99$, representam órbitas típicas de cometas periódicos

2 Johannes Kepler

Johannes Kepler nasceu em 27 de dezembro de 1571, no sul da atual Alemanha, que naquela época pertencia ao Sacro Império Romano, em uma cidade chamada Weil der Stadt, região da Swabia. Era filho de Heinrich Kepler, um soldado, e de sua esposa Katharina, cujo sobrenome de solteira era Guldenmann. Seu avô paterno, Sebald Kepler, era prefeito da cidade, apesar de ser protestante (luterano), numa cidade católica. Esta era a época da Renascença e da Reforma Protestante.

Por ter corpo frágil e pelas poucas condições financeiras da família foi enviado ao seminário para seus estudos. Em setembro de 1588 Kepler passou o exame de admissão (bacharelado) da Universidade de Tübingen, mas só iniciou seus estudos lá em 17 de setembro de 1589, onde estudava teologia no seminário Stift. Em 10 de agosto de 1591 foi aprovado no mestrado, completando os dois anos de estudos em *Artes*, que incluía grego, hebreu, astronomia e física.



Figura 5.: Retrato de Johannes Kepler.

Iniciou, então, os estudos de teologia, estudando grego com Martin Crusius, matemática e astronomia com Michael Maestlin, aprendendo com este sobre Copérnico, embora seu mestre defendesse o modelo geocêntrico do *Almagesto* de Ptolomeu. Antes de completar seus estudos, Kepler foi convidado a ensinar matemática no seminário protestante (Stiftsschule) de Graz, na Áustria, onde chegou em 11 de abril de 1594. Seu trabalho, além de ensinar matemática, que se conectava com a astronomia, também incluía a posição de matemático e calendarista do distrito. Naquela época, o calendarista deveria prever o clima, dizendo a melhor data para plantar e colher, prever guerras e epidemias e mesmo eventos políticos. Kepler fazia os calendários porque era sua obrigação, mas tinha sérias restrições à sua veracidade, dizendo por exemplo: "Os céus não podem causar muitos danos ao mais forte de dois inimigos, nem ajudar o mais fraco... Aquele bem preparado supera qualquer situação celeste desfavorável." E mais, Kepler usava os calendários para instigar cuidados, disfarçados como prognósticos, para prevenir doenças.

No início de 1597, Kepler publica seu primeiro livro, *Prodromus disserationum cosmographicarum continens mysterium cosmographicum de admirabili proportione orbium celestium deque causis coelorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis et propriis, demonstratum per quinque regularia corpora geometrica*, cujo título abreviado é *Mysterium Cosmographicum* (Mistérios do Universo). Neste livro defendia o heliocentrismo de Copérnico e propunha que o tamanho de cada órbita planetária é estabelecido por um sólido geométrico (poliedro) circunscrito à órbita anterior. Este modelo matemático poderia prever os tamanhos relativos das órbitas. Kepler enviou um exemplar para Tycho Brahe, que respondeu que existiam diferenças entre as previsões do modelo e suas medidas. Um exemplar enviado a Galileu, 8 anos mais velho que Kepler, fez este enviar uma pequena carta a Kepler agradecendo mas dizendo que ainda não havia lido e dizendo que acreditava na teoria de Copérnico.

Em setembro de 1598, o arquiduque da Áustria, príncipe Ferdinando de Habsburgo, líder da Contra-Reforma Católica, fechou o colégio e a igreja protestante em Graz e ordenou que todos os professores e padres deixassem a cidade imediatamente. Kepler foi autorizado a retornar a cidade, como matemático do distrito,

onde permaneceu até agosto de 1600, quando foi expulso definitivamente da cidade por recusar-se a se converter ao catolicismo.

Em junho de 1599 o imperador Rudolph II, da Boêmia, contratou Tycho Brahe como matemático da corte em Praga. Em janeiro de 1600 Kepler, então com 28 anos, visitou-o no castelo de Benatky, que o imperador tinha colocado à disposição de Tycho. Kepler sabia que somente com os dados de Tycho Brahe poderia resolver as diferenças entre os modelos e as observações. Tycho não acreditava no modelo de Copérnico por motivos teológicos, mas também porque acreditava que fosse possível medir a paralaxe das estrelas, que o modelo de Copérnico assumia à distância infinita. A paralaxe (na astronomia é a diferença da direção de um objeto celeste vista por um observador sob dois pontos amplamente distanciados) das estrelas só foi medida em 1838, pela primeira vez, por Friedrich Wilhelm Bessel. Kepler já tinha observado eclipses e mesmo as estrelas, procurando medir a paralaxe, mas seus instrumentos eram muito rudes e sua vista muito fraca.

Em 19 de outubro de 1600, Kepler, abandonado por seus antigos mestres por suas convicções na teoria heliocêntrica de Copérnico e também por suas tendências Calvinistas, não aceitando os dogmas incondicionalmente, começou a trabalhar para Tycho Brahe em Praga. Em setembro de 1601 Kepler retornou a Praga depois de uma visita a Graz para acertar a herança de seu sogro e Tycho já havia instalado seus instrumentos, que haviam sido trazidos de Hveen. Tycho o apresentou ao imperador, que o contratou como assistente de Brahe. Logo depois, em 24 de outubro de 1601, Brahe morreu. Dois dias depois o imperador nomeou Kepler como matemático imperial, sucedendo Brahe na tarefa de calcular as Tabelas Rudolfinas, com a previsão das posições dos planetas.

Kepler começou imediatamente a trabalhar no cálculo da órbita de Marte, e em 1602 descobriu a Lei das Áreas, mas não conseguiu fitar a forma da órbita. Se a órbita fosse circular, bastariam 3 observações, pois 3 pontos definem um círculo. Os pontos deveriam ser observados em oposição, já que em oposição é irrelevante se é a Terra ou o Sol que se movem, pois os três corpos estão alinhados. Tycho tinha observado 10 oposições de Marte entre 1580 e 1600, às quais Kepler depois adicionou as de 1602 e 1604. Naturalmente qualquer conjunto de 3 observações deveria resultar na mesma

órbita. Como Marte é o planeta externo com maior excentricidade, dos conhecidos então, um círculo não fitava as observações. Kepler não conseguia fitar as observações com erro menor que 8', enquanto a precisão das observações de Tycho era da ordem de 1'. Em 1605 Kepler descobriu que a órbita era elíptica, com o Sol em um dos focos. Estes resultados foram publicados no *Astronomia Nova*, em 1609.

Em 1604 Kepler completou o *Astronomiae pars Optica (Ad Vitellionem Paralipomena, quibus Astronomiae Pars Optica traditur)*, considerado o livro fundamental da ótica, onde explicou a formação da imagem no olho humano, explicou como funciona uma câmara obscura, descobriu uma aproximação para a lei da refração, estudou o tamanho dos objetos celestes e os eclipses.

Em 17 de outubro de 1604 Kepler observou uma nova estrela na constelação de Ophiucus, junto a Saturno, Júpiter e Marte, que estavam próximos. A estrela competia com Júpiter em brilho. Kepler imediatamente publicou um pequeno trabalho sobre ela, mas dois anos depois publicou um tratado, descrevendo o decaimento gradual de luminosidade, a cor, e considerações sobre a distância que a colocava junto com as outras estrelas.

Em 1610 Kepler leu o livro com as descobertas de Galileu usando o telescópio, e escreveu um longa carta em suporte publicada como *Dissertatio cum Nuncio Sidereo* (Conversa com o Mensageiro Sideral). Em agosto de 1610 ele usou um telescópio dado por Galileu ao duque da Bavária, Ernst de Cologne, para observar os satélites de Júpiter, publicando *Narratio de Observatis Quatuor Jovis Satellitibus* (Narração das Observações dos Quatro Satélites de Júpiter). Estes tratados deram grande suporte a Galileu, cujas descobertas eram negadas por muitos. Os dois trabalhos foram republicados em Florença.

Kepler também estudou as leis que governam a passagem da luz por lentes e sistemas de lentes, inclusive a magnificação e a redução da imagem, e como duas lentes convexas podem tornar objetos maiores e distintos, embora invertidos, que é o princípio do telescópio astronômico. Estudou também o telescópio de Galileu, com uma lente convergente como objetiva e uma lente divergente como ocular. Estes estudos foram publicados no *Dioptrice*, em 1611.

Em 1612, com a morte do Imperador Rudolph II, que havia abdicado em 23 de maio de 1611, Kepler aceitou a posição de matemático e professor do colégio distrital em Linz. Lá publicou o primeiro trabalho sobre a cronologia e o ano do nascimento de Jesus, em alemão em 1613 e, ampliado, em latim em 1614: *De vero Anno, quo aeternus Dei Filius humanam naturam in Utero benedictae Virginis Mariae assumpsit* (Sobre o Verdadeiro Ano em que o Filho de Deus assumiu a Natureza Humana no Útero da Sagrada Virgem Maria). Neste trabalho Kepler demonstrou que o calendário Cristão estava em erro por cinco anos, pois Jesus tinha nascido em 4 a.C., uma conclusão atualmente aceita. O argumento é que em 532 d.C., o abade Dionysius Exigus assumiu que Cristo nascera no ano 754 da cidade de Roma, correspondente ao ano 46 do calendário Juliano, definindo-o como o ano um da era cristã. Entretanto vários historiadores afirmavam que o rei Herodes, que faleceu depois do nascimento de Cristo, morreu no ano 42 do calendário Juliano. Deste modo, o nascimento ocorrera em 41 do calendário Juliano, 5 anos antes do que Dionysius assumira.

Entre 1617 e 1621 Kepler publicou os 7 volumes do *Epitome Astronomiae Copernicanae* (Compendium da Astronomia Copernicana), que se tornou a introdução mais importante à astronomia heliocêntrica, e um livro texto de grande uso. A primeira parte do Epitome, publicada em 1617, foi colocada no Index de livros proibidos pela Igreja Católica em 10 de maio de 1619. A proibição por parte da Igreja Católica às obras sobre o modelo heliocêntrico começou pelo fato de Galileu ter escrito seu livro *Siderius Nuncius* (Mensagem Celeste) em 1610, despertando o interesse do povo. A razão da proibição era que no Salmo 104:5 do Antigo Testamento da Bíblia, está escrito: "Deus colocou a Terra em suas fundações, para que nunca se mova".

Em 1619 Kepler publicou *Harmonices Mundi* (Harmonia do Mundo), em que derivava que as distâncias heliocêntricas dos planetas e seus períodos estão relacionados pela Terceira Lei, que diz que o quadrado do período é proporcional ao cubo da distância média do planeta ao Sol. Esta lei foi descoberta por Kepler em 15 de maio de 1618.

Em 1615-16 houve uma caça às bruxas em sua região nativa e ele defendeu sua mãe num processo em que ela era acusada de bruxarias. O processo se estendeu até 1620, quando ela foi liberada.

O ano de 1618 marcou o início da Guerra dos Trinta Anos, entre os Reformistas Protestantes e a Contra Reforma Católica, que devastou a região da Alemanha e Áustria. A posição de Kepler piorava, pois a Contra Reforma Católica aumentava a pressão sobre os protestantes na Alta Áustria, da qual Linz era a capital. Como Kepler era oficial da corte, ele estava isento do decreto que bania todos os protestantes da província. Neste período, Kepler estava imprimindo as *Tabulae Rudolphinae* baseadas nas observações de Tycho Brahe e calculadas de acordo com suas órbitas elípticas. Estas tabelas incluíam a posição dos planetas e cálculos de eclipses. Quando uma rebelião ocorreu e Linz foi tomada, a oficina de impressão foi queimada, e com ela muito da edição já impressa. Kepler e sua família deixaram Linz em 1626. Sua família ficou em Regensburg, enquanto ele mudou-se para Ulm, para imprimir as *Tabulae Rudolphinae*, finalmente publicadas em 1627. Essas tabelas provaram-se precisas por um longo tempo, trazendo a aceitação geral ao sistema heliocêntrico.

Apesar do nome de Kepler estar ligado à Astrologia, ele diz: “Meus corpos celestes não eram o nascimento de Mercúrio na sétima casa em quadratura com Marte, mas Copérnico e Tycho Brahe; sem suas observações, tudo o que eu pude trazer à luz estaria enterrado na escuridão.”

Kepler então juntou-se à sua família em Regensburg, mas mudou-se para Sagan em julho de 1628, como matemático do imperador e do duque de Friedland. Em uma viagem, foi acometido de uma doença aguda em Regensburg, Alemanha, onde faleceu em 15 de novembro de 1630.

3 As três Leis de Kepler

3.1 Primeira lei de Kepler (Lei das órbitas)

A primeira lei de Kepler é a seguinte:

“Cada planeta move-se em uma órbita elíptica com o Sol em um dos focos.”

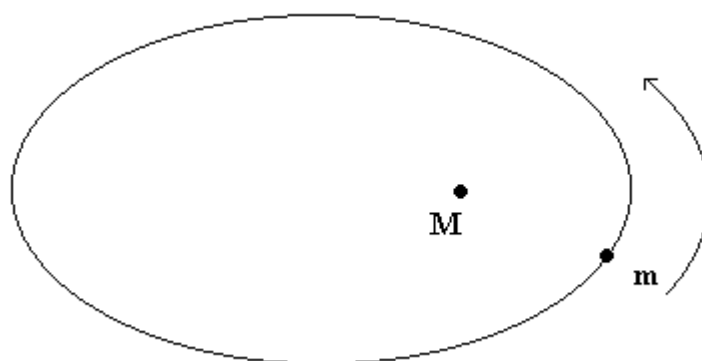


Figura 6.: Órbita elíptica de m ao redor de M .

A lei acima diz respeito à órbita dos planetas em relação ao sol, contudo ela é válida para quaisquer dois corpos do universo (no entanto as órbitas descritas não são necessariamente elipses, mas cônicas em geral; inclusive círculos), desde que a massa de um dos corpos seja muito maior do que a do outro e se tenha condições iniciais apropriadas. Exemplo disso são os satélites de televisão orbitando ao redor da Terra, as luas dos planetas, cometas, asteróides, etc.

Para demonstrar a primeira lei para os planetas do sistema solar precisa-se de início demonstrar que, de fato, as órbitas descritas por eles estão num plano. Logo após é necessário mostrar que além de pertencerem a um plano as órbitas descrevem uma cônica, que neste caso deve ser uma elipse. Entretanto, a dedução que será feita provará que um corpo de massa m orbita ao redor de outro de massa muito maior M , por causa da força gravitacional e condições iniciais, segundo uma cônica (estando os corpos isolados sem forças significativas atuando por perto além da gravitacional entre eles).

Dedução da Primeira Lei:

Suponha-se que a única força a se considerar seja a força de atração gravitacional dada pela da Gravitação Universal de Newton (figura 7):

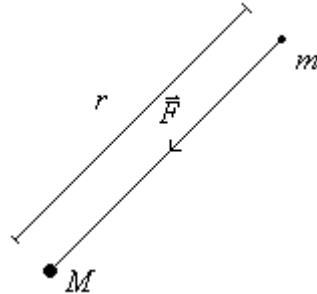


Figura 7.: Desenho ilustrativo da ação de uma força central.

A lei da gravitação universal de Newton foi obtida a partir das três leis de Kepler. A rigor generalizando mais as três leis de Kepler pode-se mostrar a implicação destas na lei da gravitação universal, e vice-versa, usando o fato de $m \ll M$. No entanto a lei da gravitação é, do modo como foi enunciada, mais abrangente quês do movimento planetário, justificando assim esta dedução.

Da lei da gravitação de Newton tem-se que $\vec{F} = G \frac{Mm}{r^2}$. Já pela sua segunda lei ($\vec{F} = m\vec{a}$) a toda força \vec{F} está associada uma aceleração \vec{a} diretamente proporcional a ela considerando que a massa m em questão seja constante. É imediata a conclusão de que \vec{a} e \vec{F} possuem mesmo sentido e direção. A figura 7 exhibe duas massas m e M que se encontram a uma distância r e um vetor \vec{F} que representa a força que m exerce sobre M . É interessante considerar ainda um raio vetor $\vec{r} = \vec{r}(t)$ (vetor dependente de um tempo t) com módulo $\|\vec{r}\| = r$, mesma direção de \vec{a} mas sentido oposto ao mesmo (figura 8), logo:

$$\vec{r} \times \vec{a} = r \text{sen} \theta = r \text{sen} 0 = 0$$

Observando a figura seguinte:

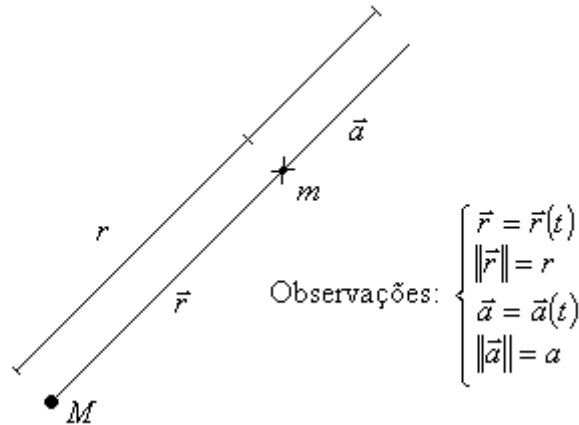


Figura 8.: Desenho ilustrativo da ação de uma força central e dos entes envolvidos.

Seja $\vec{v} = \vec{v}(t)$ o vetor velocidade associado a massa m no instante t . Fazendo a derivada $\frac{d(\vec{r} \times \vec{v})}{dt}$ tem-se:

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + \vec{r} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = 0 + 0 = 0.$$

Isto significa que $\vec{r} \times \vec{v}$ é constante (para todo t real tem mesmo módulo, sentido e direção). Além disso $\vec{r} \times \vec{v}$ é o vetor normal ao plano definido por \vec{r} e \vec{v} . Por estas considerações conclui-se, então, que de fato a curva descrita pela massa m em relação a massa M está contida num plano.

Seja, então, $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{b}$ para todo t . Em particular, pode-se fazer:

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \vec{r}_0 \times \vec{v}_0 = r_0 v_0 \sin \theta \vec{k} = r_0 v_0 \sin \frac{\pi}{2} \vec{k} = r_0 v_0 \vec{k} \Rightarrow \\ \vec{r} \times \vec{v} &= \vec{b} = r_0 v_0 \vec{k} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Vê-se que $\theta = \frac{\pi}{2}$, isto acontece porque numa situação inicial aonde $\|\vec{r}\| = r$ assume o menor valor possível o vetor \vec{v} deve ser ortogonal a \vec{r} , caso contrário encontrar-se-ia uma contradição com o fato de r ser o menor possível, fato que não será discutido aqui.

Considerar-se-á $\vec{n} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$, onde \vec{n} é o vetor unitário, $\|\vec{n}\| = 1$, que possui a mesma direção e sentido de \vec{r} para todo instante t . Deste modo fica trivial perceber que:

$$\vec{r} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} = r\vec{n} \quad (3.2)$$

A aceleração da massa m pode-se obter a partir da lei da gravitação:

$$\vec{a} = -\frac{GM}{r^2} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}), \text{ já que } \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Derivando a velocidade em relação ao tempo obtém-se:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr\vec{n}}{dt} = r \frac{d\vec{n}}{dt} + \vec{n} \frac{dr}{dt} \quad (3.3)$$

Por (3.1), (3.2) e (3.3) consegue-se deduzir que:

$$\begin{aligned} \vec{b} = \vec{r} \times \vec{v} &= (r\vec{n}) \times \left(r \frac{d\vec{n}}{dt} + \frac{dr}{dt} \vec{n} \right) = r^2 \vec{n} \times \frac{d\vec{n}}{dt} + r \frac{dr}{dt} \vec{n} \times \vec{n} = r^2 \vec{n} \times \frac{d\vec{n}}{dt} + 0 = r^2 \vec{n} \times \frac{d\vec{n}}{dt} \\ \vec{b} = \vec{r} \times \vec{v} &= r^2 \vec{n} \times \frac{d\vec{n}}{dt} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Pela Regra da Cadeia tem-se:

$$\frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d\vec{n}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \frac{d\theta}{dt}$$

Logo,

$$\vec{n} \times \frac{d\vec{n}}{dt} = \vec{n} \times (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \frac{d\theta}{dt} = (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \times (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \frac{d\theta}{dt} = \vec{k} \cdot \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow$$

$$\vec{n} \times \frac{d\vec{n}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{k} \quad (3.5)$$

Substituindo (3.5) em (3.4) tem-se:

$$\vec{b} = r_0 v_0 \vec{k} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{k} \quad (3.6)$$

Então:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\frac{GM}{r^2} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \times \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \vec{k} \right) = GM (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) \frac{d\theta}{dt} = GM \frac{d\vec{n}}{dt}$$

Por outro lado:

$$\frac{d(\vec{v} \times \vec{b})}{dt} = \vec{v} \times \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{b} = \vec{v} \times \vec{0} + \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{b} = \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} \quad (3.7)$$

Mas por (3.6) e (3.7) tem-se:

$$\frac{d(\vec{v} \times \vec{b})}{dt} = GM \frac{d\vec{n}}{dt} \quad (3.8)$$

Integrando ambos de (3.8) os lados em relação a t obtém-se:

$$\int \frac{d(\vec{v} \times \vec{b})}{dt} dt = \int GM \frac{d\vec{n}}{dt} dt \Rightarrow \vec{v} \times \vec{b} = GM\vec{n} + \vec{C} \quad (3.9)$$

Onde \vec{C} é um vetor constante de integração. \vec{C} pode ser obtido da seguinte forma:

$$\vec{v} \times \vec{b} = GM\vec{n} + \vec{C} \Leftrightarrow \vec{C} = \vec{v} \times \vec{b} - GM\vec{n} \Leftrightarrow \vec{C} = \vec{v}(t) \times \vec{b}(t) - GM\vec{n}(t) \Leftrightarrow \vec{C} = \vec{v}(t) \times \vec{b} - GM \frac{\vec{r}(t)}{r(t)}$$

Em particular para $t = 0$ conclui-se que:

$$\begin{aligned} \vec{C} = \vec{v}_0 \times \vec{b} - GM \frac{\vec{r}_0}{r_0} &= \vec{v}_0 \times (\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) - GM \frac{\vec{r}_0}{r_0} = \vec{v}_0 \times (\vec{r}_0 \times \vec{v}_0) - GM \frac{r_0 \vec{i}}{r_0} = \vec{v}_0 \times (r_0 v_0 \vec{k}) - GM \vec{i} \\ \vec{C} &= \vec{v}_0 \times (r_0 v_0 \vec{k}) - GM \vec{i} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Fazendo o produto vetorial $\vec{v}_0 \times (r_0 v_0 \vec{k})$ ter-se-á:

$$\vec{v}_0 \times (r_0 v_0 \vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & v_0 & 0 \\ 0 & 0 & r_0 v_0 \end{vmatrix} = r_0 v_0^2 \vec{i} \text{ logo, } \vec{C} = r_0 v_0^2 \vec{i} - GM \vec{i} \Rightarrow \vec{C} = (r_0 v_0^2 - GM) \vec{i}$$

$$\vec{C} = (r_0 v_0^2 - GM) \vec{i} \quad (3.11)$$

Portanto

$$\vec{v} \times \vec{b} = GM \vec{u} + (r_0 v_0^2 - GM) \vec{i} \quad (3.12)$$

Fazendo agora o produto misto $\vec{r}(\vec{v} \times \vec{b})$ de duas maneiras diferentes obtém-se:

$$(i) \vec{r}(\vec{v} \times \vec{b}) = (\vec{r} \times \vec{v}) \vec{b} = \vec{b} \vec{b} = (r_0 v_0)^2 = r_0^2 v_0^2 \quad (3.12)$$

$$(ii) \text{ Por (3.9) } \vec{r}(\vec{v} \times \vec{b}) = \vec{r}(GM \vec{n}) + \vec{r}(r_0 v_0^2 - GM) \vec{i} = \vec{r} \left(GM \frac{\vec{r}}{r} \right) + r \vec{n} (r_0 v_0^2 - GM) \vec{i} \Rightarrow$$

$$\vec{r}(\vec{v} \times \vec{b}) = \frac{\vec{r} \vec{r}}{r} GM + r (r_0 v_0^2 - GM) \cos \theta = r GM + r (r_0 v_0^2 - GM) \cos \theta$$

Por (i) e (ii) conclui-se, que:

$$r_0^2 v_0^2 = GM r + r (r_0 v_0^2 - GM) \cos \theta \Rightarrow r = \frac{r_0^2 v_0^2}{GM + (r_0 v_0^2 - GM) \cos \theta} \Rightarrow r = \frac{\frac{r_0^2 v_0^2}{GM}}{1 + \left(\frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \right) \cos \theta} \Rightarrow$$

$$r = \frac{L}{1 + e \cos \theta} \text{ com } L = \frac{r_0^2 v_0^2}{GM} \text{ e } e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \quad (3.13)$$

Observação: Será omitido o fato de que: $e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 > 0$

Com isto fica praticamente demonstrada a primeira lei de Kepler, pois a equação acima define exatamente uma cônica em coordenadas polares como já visto neste trabalho. No entanto, em relação aos planetas, estes devem estar em órbita elíptica já que por medições feitas mediante telescópios descartou-se a idéia de uma órbita circular. Como os planetas observacionalmente não se afastam indefinidamente do Sol,

a única possibilidade cabível é a deles possuírem órbitas elípticas demonstrando assim a primeira lei.



3.2 Segunda Lei de Kepler (Lei das áreas)

A segunda lei de Kepler é a seguinte:

“Áreas iguais são varridas em tempos iguais pela reta que vai do Sol ao planeta.”

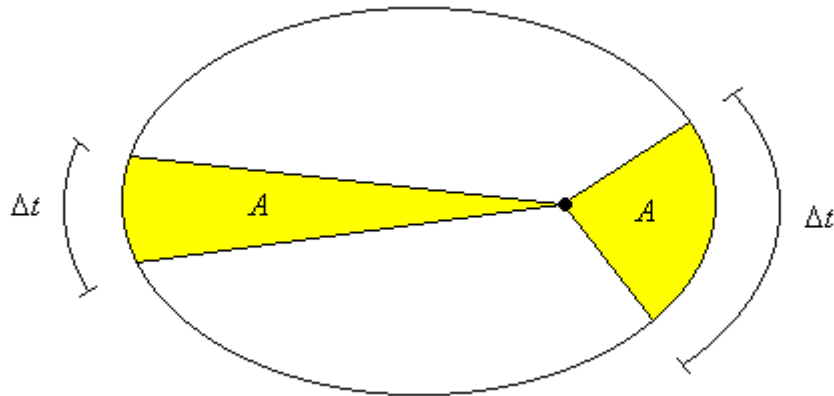


Figura 9.: Ilustração da segunda lei de Kepler.

Esta segunda lei é novamente válida não só para planetas que orbitam em torno do Sol, mas sim em geral para qualquer corpo celeste de massa muito pequena que orbita em torno de outro de massa muito maior devido a força de atração gravitacional. A segunda lei de Kepler é válida novamente para satélites de televisão, para as luas dos planetas, etc.

Deduziu-se pela primeira lei de Kepler que, em geral, corpos com massa muito pequena orbitam em torno de um corpo maior numa órbita elíptica com o corpo de maior massa centrado num dos focos desta órbita. Usando resultados e equações obtidas na dedução da primeira lei, pode-se deduzir rapidamente a segunda do seguinte modo:

Conclui-se de (3.6) $r^2 \frac{d\theta}{dt} = r_0 v_0$.

Para provar que a reta radial que parte do centro do corpo de maior massa ao centro do de menor varre áreas iguais em tempos iguais seja $r = f(\theta)$ a equação polar do planeta, e a área A área varrida pela reta radial quando ela varia de qualquer ângulo fixado θ_0 para um ângulo θ . Segue que a área A pode ser expressa como:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} f(\varphi)^2 d\varphi \quad (3.14)$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pela regra da cadeia derivando A (3.14) em relação a t obtém-se:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} f(\theta)^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (3.15)$$

Por (3.6) segue que $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r_0 v_0$, o que significa que a taxa de variação da área em relação ao tempo é constante, o que implica que áreas iguais são varridas em tempos iguais fazendo valer assim a Segunda Lei de Kepler.

□

3.3 Terceira Lei de Kepler (Lei dos Períodos)

“O quadrado do período do planeta (o tempo que leva o planeta para completar uma órbita em torno do Sol) é proporcional ao cubo do semi-eixo maior de sua órbita.”

Para deduzir a terceira lei de Kepler, considere-se a e b o semi-eixo maior e o semi-eixo menor da órbita elíptica respectivamente e T o tempo necessário para que o corpo de massa menor faça uma revolução completa em torno do de massa maior. A área delimitada pela órbita elíptica pode ser deduzida pelo cálculo integral e resulta em $ab\pi$.

Devido a segunda lei pode-se concluir que $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2} r_0 v_0$ e em particular tem-se então que:

$$\frac{ab\pi}{T} = \frac{1}{2}r_0v_0 \Rightarrow T = \frac{2\pi ab}{r_0v_0} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{r_0^2 v_0^2} \quad (3.16)$$

Entretanto, já foi visto anteriormente que $c^2 = a^2 - b^2$ e $e = \frac{c}{a}$. A partir disto

vem que:

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow b^2 = a^2(e^2 - 1) \quad (3.17)$$

Substituindo (3.16) em (3.17) obtém-se:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (e^2 - 1)}{r_0^2 v_0^2} \quad (3.18)$$

Em astronomia, o semi-eixo maior a da órbita elíptica chama-se distância média, pois é a metade da soma dos valores máximo e mínimo de r que são os valores correspondentes a $\theta = \pi$ e $\theta = 0$.

$$r_\pi = \frac{L}{1+e \cos \pi} = \frac{L}{1-e} \text{ (raio máximo)} \quad \text{e} \quad r_0 = \frac{L}{1+e \cos 0} = \frac{L}{1+e} \text{ (raio mínimo)}$$

Portanto:

$$2a = r_0 + r_\pi \Rightarrow 2a = \frac{L}{1+e} + \frac{L}{1-e} \Rightarrow 2a(1-e^2) = L(1+e+1-e) \Rightarrow 2a(1-e^2) = 2L \Rightarrow$$

$$L = a(1-e^2)$$

Obs.: Como $L = a(1-e^2)$ tem-se $r_{\max} = a(1+e)$ e $r_{\min} = a(1-e)$

Logo

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3 k}{r_0^2 v_0^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{r_0^2 v_0^2} \frac{r_0^2 v_0^2}{GM} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \quad (3.19)$$

Deste modo provou-se que T^2 é proporcional a a^3 comprovando assim a validade da terceira lei de Kepler.

□

3.4 Observações sobre a validade das três leis de Kepler

As leis de Kepler foram aqui deduzidas através de um modelo matemático desenvolvido a partir de hipóteses físicas. Num modelo, o que geralmente acontece é que são desprezadas hipóteses reais mas que por não interferirem seriamente no resultado da questão em si são desprezadas.

Na dedução das leis partiu-se da idéia de que m fosse muito menor que M . É perceptível de que se assim não fosse, ou mesmo assim sendo acontece que enquanto M gera uma força em m , m gera também uma força sobre M . Estas duas forças são iguais pela Segunda Lei de Newton. Duas acelerações a_1 e a_2 estão envolvidas neste conjunto de massas que se atraem devido a força gravitacional que podem ser calculadas da seguinte maneira:

(i) Aceleração a_1 exercida sobre m :

$$F = \frac{GmM}{r^2} = ma_1 \Rightarrow a_1 = \frac{GM}{r^2}$$

(ii) Aceleração a_2 exercida sobre M :

$$F = \frac{GmM}{r^2} = Ma_2 \Rightarrow a_2 = \frac{Gm}{r^2}$$

(iii) Comparando a_1 e a_2 :

$$a_1 \gg a_2 \text{ pois } M \gg m \Rightarrow \frac{GM}{r^2} \gg \frac{Gm}{r^2} \Leftrightarrow a_1 \gg a_2$$

(iv) O módulo da aceleração resultante seria:

$a = \|a_1 - a_2\|$ mas devido aos fatos anteriores desprezou-se a_2 , e portanto $a = a_1$ (esta igualdade é válida para o sentido, direção e intensidade dos vetores).

Outro fato desprezado é que, enquanto, por exemplo, a Terra é atraída pelo Sol, ela é ao mesmo tempo atraída por Marte, Vênus, Plutão, Sírius, etc. gerando turbulências na validade do modelo. O que aconteceria caso desejasse-se fazer orbitar elipticamente uma bolinha de isopor de diâmetro de, por exemplo, 1 mm ao redor de uma bola de chumbo de 2 m de diâmetro? Usando os resultados que dizem quais deve ser a distância da bolinha de isopor à bola de chumbo bem como uma velocidade inicial esperar-se-ia que as três leis de Kepler valessem e efetivamente funcionassem. A bolinha de isopor orbitaria elipticamente com a bola de chumbo com seu centro num dos focos da órbita, a velocidade da bolinha satisfaria, ainda, a segunda e a terceira lei. Entretanto, isso não acontece realmente na atmosfera terrestre já que, como frisado, a Terra atrai a bola pequena e a grande gerando uma aceleração resultante não condizente com o esperado segundo as leis. Problemas de mais corpos são estudados atualmente por cientistas respeitados, dependendo das condições iniciais um problema de três corpos pode exigir uma matemática pesada.

Implicitamente, na dedução das leis, também se usou o fato de que a massa dos corpos envolvidos estaria concentrada em seus respectivos centros de massa.

Alguns séculos atrás Kepler estava analisando artificialmente órbitas concluindo que não podiam ser circulares. Isto podia ser facilmente concluído pois um círculo é definido por três pontos não colineares. Com os artefatos e telescópios da época e mesmo com fraca visão Kepler fez boas medições e conjecturou sua primeira lei empiricamente, fazendo com que sua lei, que na verdade não é uma lei por que pode ser provada (as leis em física são como os postulados e axiomas em matemática), virasse uma forte conjectura. Obs: Pode-se dizer que as leis de Kepler praticamente equivalem a terceira de Newton.

O mais curioso de todas as observações feitas invalidando a rigor as três no contexto real, considerando apenas forças gravitacionais entre dois corpos, desprezando forças eletromagnéticas, resistências de gases, infinitude ou não do Universo, o próprio tempo, questões algumas de física teórica discutidas inclusive pelo fantástico físico Stephen Hawking em seu célebre livro “Uma Breve História do Tempo” consegue-se, de modo preciso, nos moldes da sociedade fazer orbitar satélites artificiais que

permitem aos leigos em matemática e física comunicar-se via celular, assistir a uma copa do mundo que acontece no Japão, mandar e receber e-mails de todas as partes do mundo.

3.5 Satélites Artificiais

A Terra possui apenas um satélite natural, a Lua, no entanto, a necessidade e a ousadia humana fizeram com que se tornasse possível fazer orbitar corpos não celestiais ao redor dela. Estes corpos desenvolvidos por matemáticos, físicos, engenheiros, astrônomos, químicos, etc são chamados de satélites artificiais.

Os satélites artificiais possuem várias finalidades, como, por exemplo, possibilitar a transmissão de ondas de televisão, tirar fotos de importantes áreas geográficas bem como auxiliar no estudo de previsão do tempo. Servem também de apoio a ligações feitas celulares e telefonemas separados por continentes.

Quando satélites orbitam ao redor da Terra e possuem uma velocidade similar a da rotação dela são chamados de geocêntricos ou, se de modo equivalente, possuírem um período igual a da Terra, ou seja; um dia . Estes se caracterizam por parecer imóveis para um observador terrestre. Como já visto se eles, os satélites, efetivamente orbitarem, retornando a sua posição inicial, ao redor da Terra, esta órbita terá necessariamente que ser uma cônica, neste caso circular ou elíptica (o caso em que forem parabólicas ou hiperbólicas será discutido no sub-capítulo seguinte). Continuam então valendo as três leis de Kepler que darão base para que se possa calcular a velocidade inicial com que um satélite deve ser lançado, isto a uma certa altura, para que orbite num período de um dia astronômico, cerca de 23h 54min e alguns segundos. Problemas desse tipo serão discutidos ainda neste capítulo sob a forma de exercícios resolvidos.

Se além de possuir período igual ao da Terra um satélite artificial provir de uma órbita circular em torno do Equador este é denominado geossincrônico. Em seguida, a figura 10 mostra um satélite artificial geocêntrico.

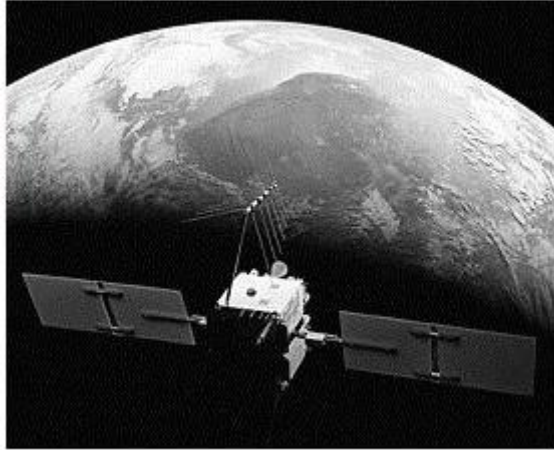


Figura 10.: Fotografia de um Satélite Geocêntrico.

Desde o primeiro satélite artificial, o Sputnik, lançado pela União Soviética em 1957, 3800 foguetes e 4600 satélites artificiais foram lançados da Terra. Destes, 500 estão em funcionamento. Muitos explodiram, dando origem a mais de 100000 fragmentos, menores que 10 cm, que não podem ser detectados por radares aqui na Terra. Estes fragmentos constituem o lixo espacial. 8000 fragmentos maiores são monitorados aqui da Terra, porque podem causar sérios danos às naves e satélites, tripulados ou não.

Para órbitas de planetas ao redor do Sol, o ponto no qual a distância entre o centro do planeta e o centro do Sol é a máxima é chamada de **afélio** e o ponto no qual é mínima é chamada de **periélio**. Já para satélites artificiais ou não que orbitam em torno da Terra o ponto no qual a distância máxima acontece é chamada de **apogeu** e onde a distância é mínima é chamada de **perigeu**. A figura a seguir (figura 10) esboça esta menção.

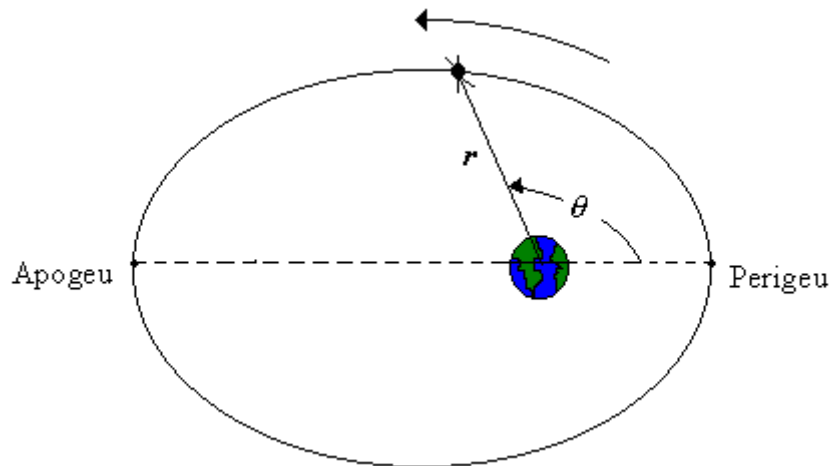


Figura 11. Nomenclatura dos extremos de uma órbita elíptica.

3.6 Velocidade de Escape

Na dedução da primeira lei concluiu-se que e depende de r_0 e v_0 , já que $e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$ (3.13). Caso queira-se que m descreva uma trajetória elíptica em torno de M devemos ter uma velocidade inicial v_0 apropriada para que a excentricidade seja menor que um e maior que zero, senão m toma outra trajetória, elíptica ou hiperbólica (figura11), e não mais retorna a sua posição inicial. Este fato pode ser explicado se for provado que todas as cônicas (elipse, hipérbole, parábola e suas respectivas degenerações) são expressas do mesmo modo em coordenadas polares, onde a única mudança é o valor das excentricidades, como expressado adiante:

- (i) Elipse se, e somente se $0 \leq e < 1$;
- (ii) Parábola se, e somente se $e = 1$;
- (iii) Hipérbole se, e somente se $e > 1$.

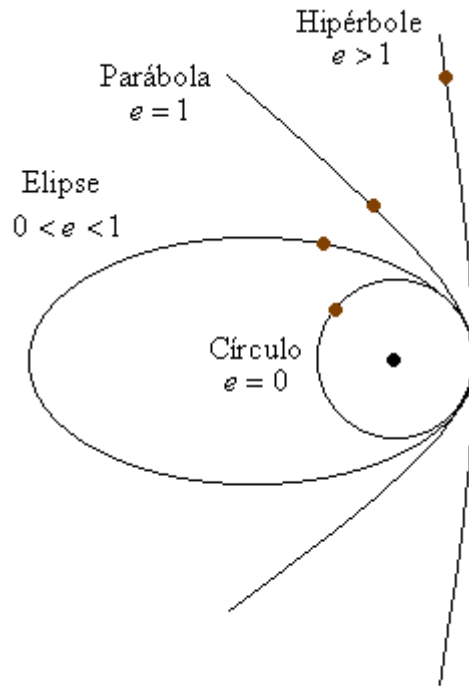


Figura 12.: Possíveis trajetórias de um corpo atraído por uma força central.

Define-se, então, como velocidade de escape a menor velocidade de partida tal que um corpo atraído por outro fuja, ou escape, de uma órbita elíptica. Para isto, basta que as condições iniciais impliquem numa excentricidade igual a um. Deste modo, o corpo percorrerá uma órbita parabólica e não mais retornará a sua posição inicial a não ser por forças externas. Eis a dedução da velocidade de escape de um corpo de massa m atraído por outro de massa muito maior M :

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \quad \text{e} \quad e = 1 \quad \text{implica em:}$$

$$1 = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \Rightarrow 2GM = r_0 v_0^2 \Rightarrow v_0^2 = \frac{2GM}{r_0} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

A notação desta velocidade é v_{esc} , logo:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \tag{3.20}$$

Logo abaixo há uma tabela ilustrando em m/s , baseada em valores apropriados de GM , a velocidade de escape dos nove planetas do sistema solar e da lua.

planeta ou satélite	velocidade de escape (em metros por segundo)
Mercúrio	4300
Venus	10400
Terra	11200
Lua	2361
Marte	5000
Júpiter	59500
Saturno	35600
Urano	21300
Netuno	23300
Plutão	1100

Tabela 2.

Em suma, se, por exemplo, a Lua pudesse ser acelerada artificialmente de tal modo que sua velocidade chegasse a $2361 m/s$, ou seja, cerca de $8500 km/h$ ela tomaria uma trajetória parabólica e nunca mais seria a dona da noite da Terra.

3.7 Exercícios resolvidos com aplicações das leis de Kepler

- 1) Determinar a altura em km na qual deve ser lançado um satélite para que ele seja geossíncrono e sua órbita seja praticamente circular, sabendo que experimentalmente concluiu-se que o valor GM da Terra é aproximadamente $3,99 \times 10^5 km^3 / s^2$ e que o raio equatorial, o maior da Terra, mede cerca de $6440 km$.

Solução:

Da terceira lei de Kepler tem-se que $T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$ onde T é o período do satélite,

$24h$ aproximadamente, e a é o semi-eixo maior da órbita do satélite. Como esta órbita é considerada praticamente circular, então, a é raio desta órbita cujo centro é o da Terra. Então:

24 horas equivalem a 86400 segundos $\Rightarrow T = 86400 \text{ s}$, logo

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \Rightarrow 86400^2 = \frac{4,3,1415^2 \cdot a^3}{3,99 \times 10^5} \Rightarrow a \cong 42255,20 \text{ km}$$

OBS: π foi aproximada com quatro casas decimais.

Subtraindo de a o valor do raio da Terra ter-se-á um valor com boa aproximação da altura na qual o satélite deve permanecer, como segue:

$$h \cong 42255,20 - 6440 \Rightarrow h \cong 35815,20 \text{ km}.$$

2) O cometa Halley, que passou em volta do Sol em 1986, se move numa órbita elíptica com uma excentricidade de 0,967 e um período de 76 anos. Calcular a distância mínima e máxima do cometa em relação ao Sol.

Dados extras:

Massa do Sol: $1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

Solução:

Obs: 76 anos equivalem a $76 \times 365 \times 24 \times 3600 \text{ s}$.

Novamente da terceira lei de Kepler tem-se:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} \Rightarrow (76.365.24.3600)^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{6,67 \times 10^{-11} \cdot 1,99 \times 10^{30}} \Rightarrow a \cong 2,68 \times 10^{12} \text{ m}$$

O valor a é o semi-eixo maior da órbita analisada. Viu-se na dedução da terceira lei de Kepler que há uma relação entre este, o valor a e os raios mínimo e máximo da órbita como segue:

$$r_{\min} = a(1 - e) \Rightarrow r_{\min} \cong 2,68 \times 10^{12} (1 - 0,967) \Rightarrow r_{\min} \cong 8,8 \times 10^{10} \text{ m}$$

$$r_{\max} = a(1 + e) \Rightarrow r_{\max} \cong 2,68 \times 10^{12} (1 + 0,967) \Rightarrow r_{\max} \cong 5,27 \times 10^{12} \text{ m}$$

Obs: É dado a Edmond Halley o crédito por expor o trabalho de forças gravitacionais e centrais ao mundo. Após observar o cometa pessoalmente em 1682, Halley ficou interessado. Em 1705 ele previu a próxima ocorrência do cometa, que aconteceu em 1758. Por estes trabalhos e previsões o cometa recebeu o nome de Halley.

4 Séries de Fourier

4.1 Condução de calor e Jean B. J. Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier nasceu em Auxerre, em 1768. Órfão aos 8 anos, Fourier foi colocado no Colégio Militar, dirigido pelos beneditinos. Aos 12 anos, Fourier começou a mostrar parte do seu talento, redigindo sermões para sacerdotes de várias cidades. Dois anos mais tarde iniciou seus estudos de Matemática, conseguindo grande destaque. Considerado menino-prodígio, foi convidado a ingressar na ordem dos beneditinos, mas, antes de ordenar-se, chegou a Revolução de 1789.

Fourier que sempre desejara ser militar aderiu com entusiasmo à causa da Revolução. Com a criação da Escola Normal e da Escola Politécnica, das quais foi conferencista, Fourier começou a desenvolver os trabalhos que o imortalizaram como matemático. Data dessa época sua teoria para calcular raízes irracionais das equações algébricas, cujo estudo Newton iniciara.

Tendo acompanhado Napoleão ao Egito, Fourier desenvolveu ali estudos de arqueologia, tornando-se especialista em egiptologia. Fourier trabalhou nessa época como engenheiro, dirigindo uma fábrica de armamentos do exército francês no Egito.

Voltando à França, em 1812, Fourier desenvolveu, na sua obra "Memorial", uma teoria sobre a condução do calor, tornando-se precursor da Física-Matemática. Neste último estudo, o matemático francês foi levado a criar um novo tipo de desenvolvimento em série, diferente do método de Taylor por empregar funções periódicas em vez de potências, e que recebeu seu nome. Em 1830 morreu Fourier; vítima de um aneurisma cerebral.

4.2 Definição da Série de Fourier

Seja f e sua derivada funções seccionalmente contínuas em $[x_0, x_1]$ e $x_1 - x_0 = L$ então a série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\cos \frac{2n\pi}{L} \right) + b_n \left(\sin \frac{2n\pi}{L} \right) \quad \text{com}$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_1} f(x) \cos \frac{2n\pi}{L} dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_1} f(x) \sin \frac{2n\pi}{L} dx$$

definida como Série de Fourier da f converge para f , valendo então a igualdade

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\cos \frac{2n\pi}{L} \right) + b_n \left(\sin \frac{2n\pi}{L} \right)$$

Entretanto, para que f possa ser escrita como uma Série de Fourier, devemos obter a_0 , para isto basta calcular a_n com $n=0$, como segue:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_1} f(x) \cos 0x dx \Rightarrow a_0 = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_1} f(x) \cdot 1 dx \Rightarrow a_0 = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$$

A série de Fourier de uma função contínua por partes num intervalo aberto converge para esta função. Na prática, pode-se pegar valores grandes de n para conseguir uma boa aproximação da função em questão.

Esta série apresenta uma grande vantagem em relação à série de Taylor já que esta faz uma aproximação local da função enquanto que a de Fourier faz uma aproximação global. Outra grande vantagem é que a função a ser aproximada não precisa nem ser derivável no intervalo considerado.

A seguir, apresentar-se-á alguns exemplos de funções e suas representações em termos de séries de Fourier, bem como gráficos ilustrativos que darão ênfase ao funcionamento da série.

Exemplo1:

Determinar a série de Fourier da função f a seguir:

Seja $f : [0, 2\pi] \rightarrow [0, V]$, com $V > 0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{V}{\pi}t & ; t \in [0, \pi) \\ 0 & ; t \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

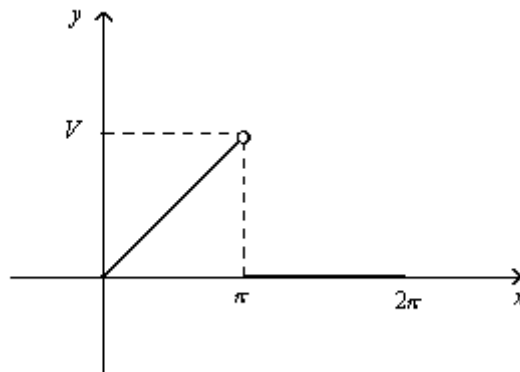


Figura 13.: Gráfico da f .

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2\pi n t}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi n t}{L} \right]$$

Cálculo de a_n :

$$a_n = \frac{2}{P} \int_0^L f(t) \cos \frac{2\pi n t}{2\pi} dt = \frac{2}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \frac{V}{\pi} t \cos n t dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0 \cos n t dt \right]$$

$$a_n = \frac{V}{\pi^2} \int_0^{\pi} t \cos n t dt$$

Fazendo por partes a integral $\int t \cos n t dt$ tem-se:

Seja:

$$u = t \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = \cos n t \Rightarrow v = \frac{\operatorname{sen} n t}{n}$$

Logo,

$$\int t \cos nt .dt = \frac{t}{n} \text{sen } nt - \frac{1}{n} \int \text{sen } nt .dt = \frac{t}{n} \text{sen } nt + \frac{1}{n^2} \cos nt$$

Portanto:

$$a_n = \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{t}{n} \text{sen } nt + \frac{1}{n^2} \cos nt \right)_0^\pi = \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{t}{n} \text{sen } n\pi + \frac{1}{n^2} \cos n\pi - \frac{t}{n} \text{sen } n0 - \frac{1}{n^2} \cos n0 \right) \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{V}{\pi^2} \left(0 + \frac{1}{n^2} \cos n\pi - 0 - \frac{1}{n^2} 1 \right) \Rightarrow a_n = \frac{V}{\pi^2} \left(\frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2} \right) \Rightarrow a_n = \frac{V}{\pi^2 n^2} (\cos n\pi - 1)$$

Cálculo de b_n :

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^{2\pi} f(t) \text{sen} \frac{2\pi n}{2\pi} dt = \frac{2}{2\pi} \left[\int_0^\pi \frac{V}{\pi} t \text{sen } ntdt + \int_\pi^{2\pi} 0 \text{sen } ntdt \right]$$

$$b_n = \frac{V}{\pi^2} \int_0^\pi t \text{sen } nt .dt$$

Fazendo agora a integral $\int t \text{sen } nt .dt$ tem-se:

Seja

$$u = t \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = \text{sen } nt \Rightarrow v = -\frac{\cos nt}{n}$$

Logo,

$$\int t \text{sen } nt .dt = -\frac{t \cos nt}{n} + \frac{1}{n} \int \cos nt .dt = -\frac{t}{n} \cos nt + \frac{1}{n^2} \text{sen } nt$$

Portanto

$$b_n = \frac{V}{\pi^2} \left(-\frac{t \cos nt}{n} + \frac{\text{sen } nt}{n^2} \right)_0^\pi \Rightarrow b_n = \frac{V}{\pi^2} \left(-\frac{\pi \cos n\pi}{n} \right) \Rightarrow b_n = -\frac{V}{\pi^2 n} \cos n\pi$$

Se n for par então $\cos n\pi = 1$ e se n for ímpar então $\cos n\pi = -1$, logo para $n \in \mathbb{Z}$ tem-se $\cos n\pi = (-1)^n$, portanto:

$$a_n = \frac{V}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1) \quad \text{e} \quad b_n = \frac{V}{\pi^2 n}(-1)^{n+1}$$

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\pi \frac{Vt}{\pi} dt + \int_\pi^{2\pi} 0 dt \right)$$

$$a_0 = \left(\frac{V}{\pi^2} \frac{t^2}{2} \right)_0^\pi \Rightarrow a_0 = \frac{V}{\pi^2} \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow a_0 = \frac{V}{2}$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{V}{4}$$

Agora se pode expressar f na forma de sua série de Fourier, como segue:

$$f(t) = \frac{V}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{V}{\pi^2 n^2}((-1)^n - 1) \right) \cos nt + \left(\frac{V}{\pi^2 n}(-1)^{n+1} \right) \sin nt \right]$$

$$f(t) = V \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{((-1)^n - 1) \cos nt + n(-1)^{n+1} \sin nt}{n^2} \right] \right)$$

Exemplo 2:

Determinar a série de Fourier da função f :

Seja f uma função real tal que:

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{l} 0; t \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2} \right] \\ 3; t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \\ 0; t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \end{array} \right\}$$

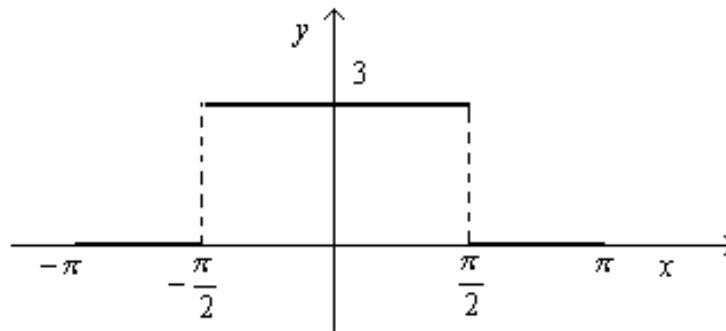


Figura 14.: Gráfico da f .

Resolução:

No cálculo da série de Fourier de uma função tem-se a propriedade de que se esta for par $b_n = 0$, caso seja ímpar $a_n = 0$. Estas propriedades não serão provadas neste trabalho, entretanto serão usadas.

Segue que a função f em questão é par, logo $b_n = 0$.

Cálculo de a_0 :

$$a_0 = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} 0 \cdot dt + \frac{2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cdot dt + \frac{2}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 \cdot dt \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} 3t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \left(3 \frac{\pi}{2} - 3 \frac{-\pi}{2} \right) \Rightarrow$$

$$a_0 = 3$$

Cálculo de a_n :

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos \frac{2\pi n}{2\pi} \cdot dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} 0 \cdot \cos ntdt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3 \cos ntdt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 \cdot \cos ntdt \right)$$

$$a_n = \frac{3}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos nt \cdot dt \Rightarrow a_n = \frac{3}{\pi} \frac{1}{n} \left[\sin nt \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow a_n = \frac{3}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin -\frac{n\pi}{2} \right)$$

Mas como a função \sin é ímpar tem-se:

$$a_n = \frac{3}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2} \right) \Rightarrow a_n = \frac{3}{n\pi} \left(2 \sin \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$a_n = \frac{6}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} \right)$$

Portanto, a representação da função f em sua respectiva série de Fourier é:

$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \cos nt + 0$$

$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2} \cos nt$$

Substituindo n por 1, 2, 3, 4, ... tem-se:

$$f(t) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} \cos t + \frac{6}{2\pi} \cdot \sin \frac{2\pi}{2} \cos 2t + \frac{6}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{2} \cos 3t + \dots$$

$$f(t) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \cdot 1 \cdot \cos t + \frac{6}{2\pi} \cdot 0 \cdot \cos 2t + \frac{6}{3\pi} \cdot -1 \cdot \cos 3t + \dots$$

Vê-se que quando n é par a respectiva parcela se anula e caso n seja ímpar $\sin \frac{n\pi}{2}$ vale

1 ou -1 , do modo como é apresentado a seguir:

$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{6}{(2k-1)\pi} \cos[(2k-1)t]$$

Ou ainda melhor:

$$f(t) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos[(2k-1)t]}{(2k-1)}$$

OBS: $2k-1 = n$

A seguir tem-se um filme de gráficos demonstrando a evolução da aproximação por séries de Fourier quando tomados valores cada vez maiores de n .

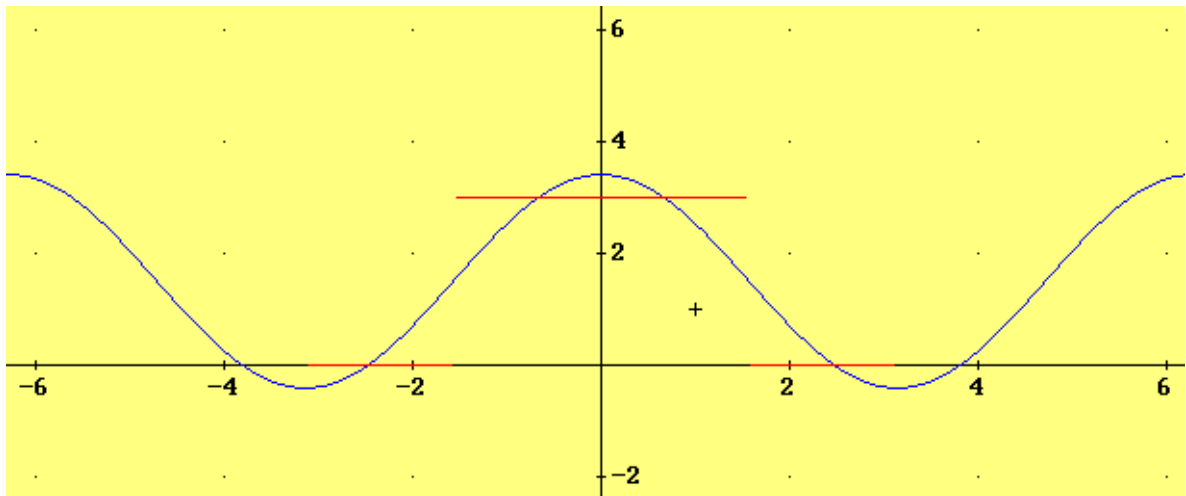


Figura 15.: Aproximação da função f mediante a sua série de Fourier com $n = 1$ ou $k = 1$.

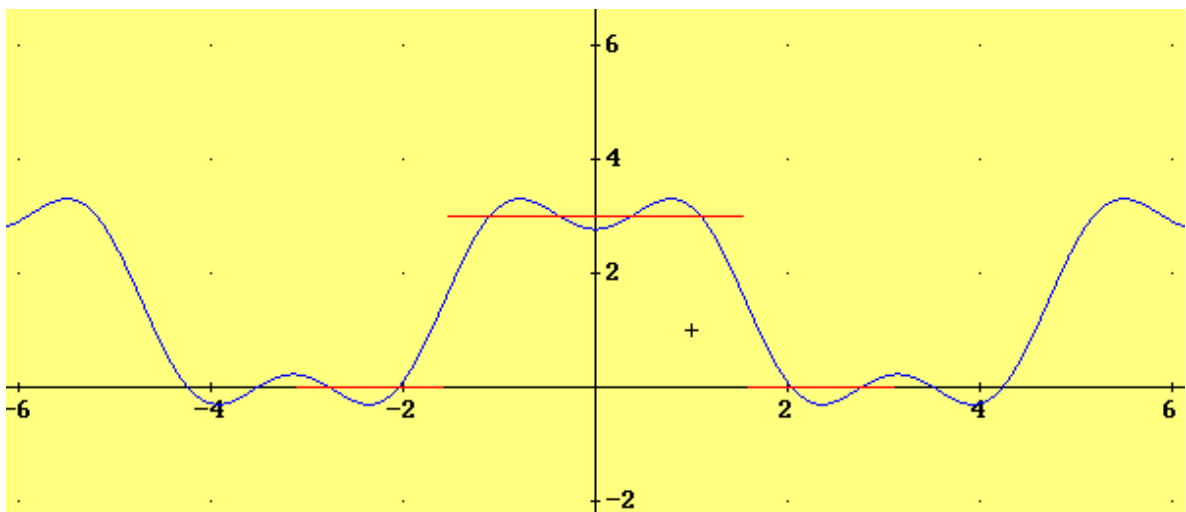


Figura 16.: Aproximação da função f mediante a sua série de Fourier com $n = 3$ ou $k = 2$.

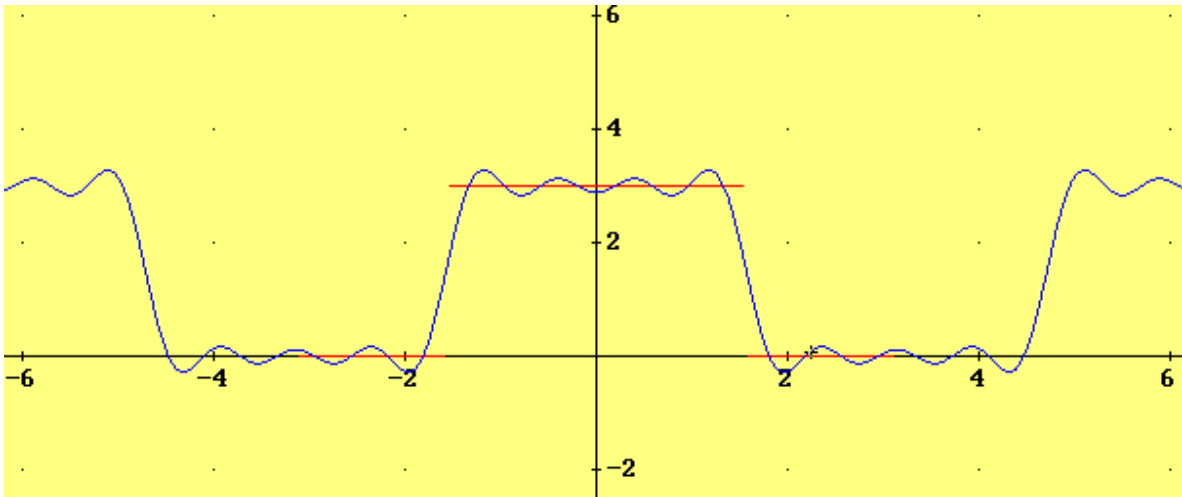


Figura 17.: Aproximação da função f mediante a sua série de Fourier com $n = 7$ ou $k = 4$.

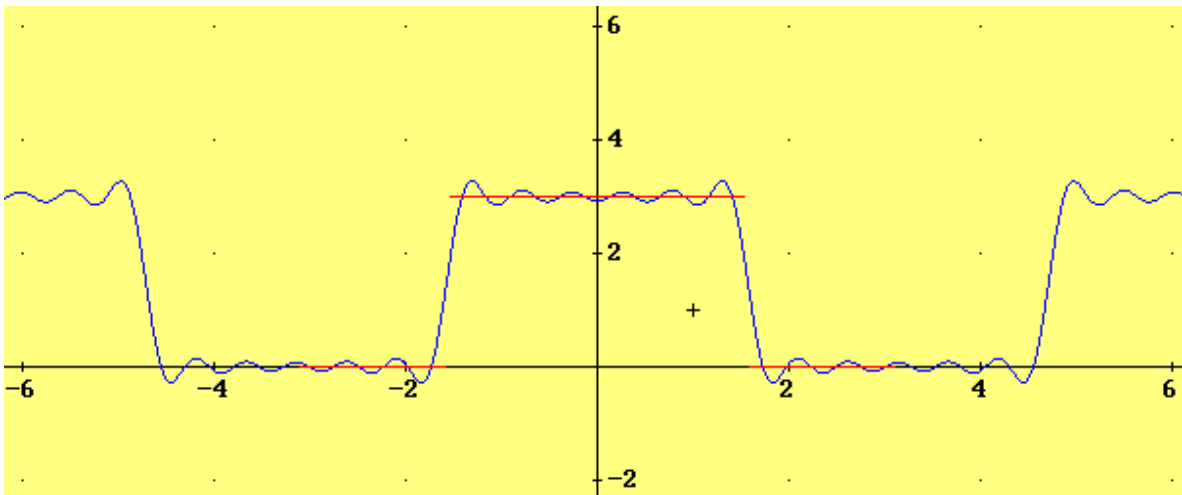


Figura 18.: Aproximação da função f mediante a sua série de Fourier com $n = 21$ ou $k = 11$.

5. Equação de Kepler

5.1. Relação entre anomalia excêntrica e anomalia verdadeira

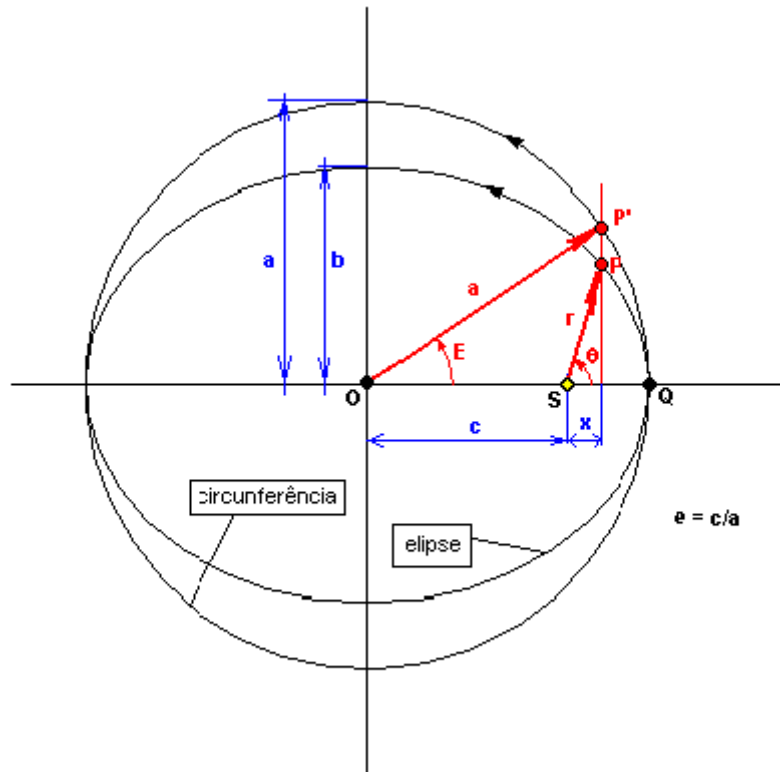


Figura 19.: Gráfico mostrando elementos geométricos necessários para este e o próximo sub-capítulo.

Na figura anterior tem-se uma órbita elíptica, de semi-eixo maior a e menor b inscrita numa circunferência de raio a , descrita por um ponto P sobre ela. O ângulo formado pelo eixo maior (reta que passa por S e Q) da elipse e pelo segmento que une o foco S e o ponto P é chamado de **anomalia verdadeira** denotado por θ ($\theta = \widehat{PSQ}$). Já o ângulo formado por P' , que é o ponto resultante da intersecção da reta perpendicular a \overline{SQ} que passa por P com a circunferência circunscrita a elipse é chamado de **anomalia excêntrica** denotado por E ($E = \widehat{QOP'}$). É possível perceber que E é determinado univocamente por θ , e θ , por sua vez é determinado pela posição de P . Será deduzida, então, uma relação entre as anomalias verdadeira e excêntrica.

Da geometria do problema tem-se:

(i) $r \cos \theta = x$.

(ii) $a \cos E = c + x \Rightarrow \cos E = e + \frac{x}{a} \Rightarrow \cos E - e = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a(\cos E - e)$

Logo por (i) e (ii)

$$r \cos \theta = a(\cos E - e) \tag{5.1}$$

(iii) Pela figura anterior tem-se que $\sin E = \frac{y}{a}$ onde y é a distância de P' a reta \overleftrightarrow{SQ} .

Pode-se calcular y usando o teorema de Pitágoras como a seguir:

$$y^2 + (c + x)^2 = a^2 \Rightarrow y = \sqrt{a^2 - (c + r \cos \theta)^2}$$

Simplificando, então, $\sin E = \frac{\sqrt{a^2 - (c + r \cos \theta)^2}}{a}$ obtém-se:

$$r \sin \theta = a(\sqrt{1 - e^2}) \sin E.$$

Por (5.1) e (iii) tem-se:

$$\begin{aligned} r^2 \cos^2 \theta &= a^2 (\cos E - e)^2 \\ r^2 \sin^2 \theta &= a^2 (\sqrt{1 - e^2})^2 \sin^2 E \Rightarrow \end{aligned}$$

$$r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = a^2 (\cos^2 E - 2e \cos E + e^2 + \sin^2 E - e^2 \sin^2 E)$$

$$r^2 = a^2 (1 + e^2 (1 - \sin^2 E) - 2e \cos E) \Rightarrow r^2 = a^2 (e^2 \cos^2 E - 2e \cos E + 1)$$

$$r^2 = a^2 (e \cos E - 1)^2 \Rightarrow r = a(1 - e \cos E) \tag{5.2}$$

Obs: Foi tomado $r \geq 0$

Unindo convenientemente (5.1) a (5.2) obtém-se:

$$a(1 - e \cos E) \cos \theta = a(\cos E - e) \Rightarrow \cos \theta = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}$$

$\cos \theta$ ainda pode ser escrito como $\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}$ e daí segue que

$$r \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = a(\cos E - e) \quad (5.3)$$

além disso, (5.2) pode ser expresso como

$$r \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = a(1 - e \cos E) \quad (5.4)$$

Portanto, somando e subtraindo (5.3) e (5.4) consegue-se:

$$r \cos^2 \frac{\theta}{2} = a(1 - e) \cos^2 \frac{E}{2} \quad \text{e} \quad r \sin^2 \frac{\theta}{2} = a(1 + e) \sin^2 \frac{E}{2}$$

Dividindo os resultados obtém-se

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \quad (5.5)$$

5.2 Dedução da equação de Kepler

Viu-se no sub-capítulo anterior que se o movimento de P' sobre a circunferência principal for conhecido, pode-se determinar univocamente a posição de P sobre a elipse. Entretanto, o movimento de P não é uniforme e, portanto, o de P' também não o é necessariamente. Será feito, agora, um estudo do movimento uniformizado de P' sobre a circunferência principal e conceber relações para que se possa estabelecer a posição e a velocidade de P' quando percorre a circunferência, não com velocidade constante, mas sim seguindo as leis de Kepler (ver figura 19).

Seja T o período de P (o mesmo de P'). Seja também n definido da seguinte maneira:

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{vê-se que } n \text{ é uma frequência média dada em } \textit{voltas} / \textit{período} \text{ ou } \textit{ângulo} / \textit{tempo})$$

Chamando de t_0 a época de passagem de P pelo pericentro (ponto Q da figura 19), o ângulo:

$$M = n(t - t_0)$$

é chamado de anomalia média. Este nada mais é do que o valor que teria, no instante t , a anomalia excêntrica de um ponto que partisse do pericentro (mencionado anteriormente) no mesmo instante de P , mas com velocidade angular constante igual n .

Na dedução da segunda e terceira lei de Kepler conclui-se que:

(i) A área varrida pelo raio vetor é proporcional ao tempo

(ii) $ab\pi = \frac{1}{2} r_0 v_0 T$

(iii) Por (i) e (ii) tem-se que:

$$\frac{ab\pi}{A} = \frac{\frac{1}{2} r_0 v_0 T}{\frac{1}{2} r_0 v_0 (t - t_0)} \Rightarrow A = \frac{ab\pi(t - t_0)}{T} = \frac{1}{2} \frac{ab \cdot 2\pi(t - t_0)}{T} = \frac{1}{2} n \cdot ab(t - t_0) \text{ onde } A \text{ é a}$$

área varrida na elipse pelo raio vetor \vec{r} do pericentro Q ao ponto P .

Por outro lado, verificou-se anteriormente que numa elipse $b = a\sqrt{1 - e^2}$ e, portanto:

$$A = \frac{1}{2} na^2 \sqrt{1 - e^2} (t - t_0)$$

(iv) Observando a figura 19 seja:

- A_1 a área do setor elíptico definido por P , S e Q .

de (iii) $A_1 = A = \frac{1}{2} na^2 \sqrt{1 - e^2} (t - t_0)$

- A_2 a área delimitada pelo segmento SP' , SQ e a circunferência principal.
- A_3 a área do setor circular determinada pelos pontos P' , O e Q .
- A_4 a área do triângulo $\Delta P'OS$.

Mediante a figura 19 é possível extrair a seguinte relação:

$$A_2 = A_3 - A_4$$

(v) Da geometria do problema tem-se que:

$$A_2 = \frac{a}{b} A_1 = \frac{a}{a\sqrt{1 - e^2}} A_1 = \frac{a}{a\sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{na^2 \sqrt{1 - e^2}}{2} (t - t_0) = \frac{a^2 n}{2} (t - t_0)$$

Além disso, segundo leis de senos e área de setores circulares, conclui-se:

$$A_4 = \frac{1}{2}(a - a(1-e))a \operatorname{sen} E \Rightarrow A_4 = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{sen} E \quad \text{e} \quad A_3 = \frac{E}{2} \cdot a^2$$

(vi) Substituindo os resultados de (v) em $A_2 = A_3 - A_4$ obtém-se:

$$\frac{1}{2}a^2n(t - t_0) = \frac{1}{2}a^2E - \frac{1}{2}a^2e \operatorname{sen} E \Rightarrow E - e \operatorname{sen} E = n(t - t_0) \Rightarrow$$

$$E - e \operatorname{sen} E = M$$

A equação anterior é a equação de Kepler que relaciona M , ou o tempo (M depende do tempo) a E .

□

5.3 Solução da equação de Kepler

Para solucionar a equação de Kepler, ou seja, achar uma função E que a satisfaça, Bessel, cuja vida e obra será comentada no próximo sub-capítulo, propôs expressar $E - M$ como uma série de senos dos múltiplos da anomalia média.

Claramente percebe-se da equação de Kepler ($E - e \operatorname{sen} E = M$ ou $E - M = e \operatorname{sen} E$) que $E - M$ é uma função periódica ímpar de E .

M também é uma função ímpar de E pois $-E - e \operatorname{sen}(-E) = -(E - e \operatorname{sen} E)$. Além disso, M é uma função crescente de E pois:

$$\frac{dM}{dE} = 1 - e \cos E \geq 0 \quad \text{e a derivada só é nula em pontos discretos.}$$

Desta forma, M é uma função ímpar e injetora de E , fato que implica em E ser uma função ímpar de M .

Portanto, se subtrairmos as duas funções ímpares de M (E e M) teremos uma nova função ímpar de M , como segue:

$$E - M = e \operatorname{sen} E \quad (\text{função ímpar de } M)$$

Expandindo a função anterior na sua série de Fourier tem-se:

$a_n = 0$ pois foi visto que para funções ímpares esse coeficiente se anula.

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{x_1}^{x_2} f(M) \operatorname{sen} \frac{n\pi M}{L} dM = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e \operatorname{sen} E \cdot \operatorname{sen} nM \cdot dM = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e \operatorname{sen} E \cdot \operatorname{sen} nM \cdot dM$$

com

$$E - M = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi M}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi M}{L} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nM$$

$$E - M = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e \operatorname{sen} E \cdot \operatorname{sen} nM \cdot dM \right) \operatorname{sen} nM = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e \operatorname{sen} E \cdot \operatorname{sen} nM \cdot dM \right) \operatorname{sen} nM$$

Mas é possível expressar a integral $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e \operatorname{sen} E \cdot \operatorname{sen} nM \cdot dM$ de uma forma melhor integrando-a por partes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e \operatorname{sen} E \cdot \operatorname{sen} nM \cdot dM &= \left(-\frac{1}{n\pi} e \operatorname{sen} E \cos nM + \frac{1}{n\pi} \int \cos nM \cdot (e \operatorname{sen} E)' dM \right)_0^{\pi} = \\ \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nM \cdot (E - M)' dM &= \frac{1}{n\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos nM (E' - 1) dM \right) = \frac{1}{n\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos nM \cdot E' dM - \int_0^{\pi} \cos nM \cdot dM \right) = \\ \frac{1}{n\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos nM \cdot dE - 0 \right) &= \frac{1}{n\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos(nE - n \cdot e \operatorname{sen} E) \cdot dE \right) \end{aligned}$$

Integrais tais quais a última que apareceu acima foram tabeladas por Bessel, definindo-se então, a função de Bessel de ordem n :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \operatorname{sen} t) dt \quad (5.6)$$

Estas funções podem ser expandidas numa série, como em frente:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \dots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x^2}{8} + \frac{x^4}{192} - \dots \right)$$

$$J_2(x) = \frac{x^2}{8} \left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{384} - \dots \right)$$

$$J_3(x) = \frac{x^3}{8} \left(1 - \frac{x^2}{16} + \dots \right)$$

$$J_4(x) = \frac{x^4}{384} \left(1 - \frac{x^2}{20} + \dots \right)$$

$$J_5(x) = \frac{x^5}{3840} (1 - \dots)$$

Em geral as funções de Bessel são dadas por:

$$J_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^{2i+n} (n+i)!} x^{2i+n}$$

OBS: A convergência da série anterior pode ser facilmente verificada, para todo número real x pelo teste da razão para convergência de séries.

O fato de se passar da integral para a série gera uma proposição que não será provada nesta monografia.

A seguir tem-se um gráfico onde estão plotadas, para $x \geq 0$, algumas das funções de Bessel.

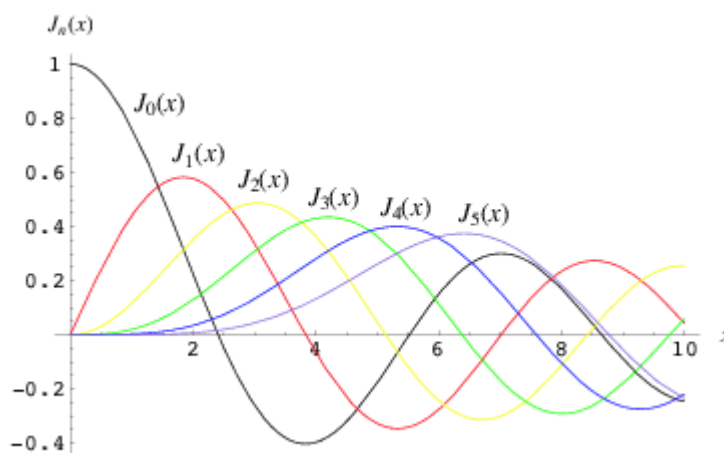


Figura 20.: Gráfico das funções J_n de Bessel.

Pode-se, então, concluir que:

$$E = M + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \text{sen } nM$$

ou ainda:

$$e \text{ sen } E = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne) \text{sen } nM$$

Com este resultado obtém-se $r = r(t)$ já que foi deduzido anteriormente que $r = a(1 - e \cos E)$. Mediante a relação entre a anomalia verdadeira θ e da excêntrica E (5.5), vista no sub-capítulo anterior, pode-se colocar o valor de θ em função de M e conseqüentemente em função do tempo.

Para fins operacionais num problema de aplicação poder-se-ia calcular primeiramente E , isto de maneira a expandir a série que o determina. Pela relação de E e θ , (5.1) ou (5.5), consegue-se então calcular θ , obtendo

$$\theta = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{tg} \frac{E}{2} \right).$$

Fazendo um truncamento para $n = 5$ chegar-se-ia ao seguinte resultado:

$$E = M + \left(e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{192}e^5 + \dots \right) \text{sen } M + \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4 + \dots \right) \text{sen } 2M + \left(\frac{3}{8}e^3 - \frac{27}{128}e^5 + \dots \right) \text{sen } 3M + \left(\frac{1}{4}e^4 - \dots \right) \text{sen } 4M + \left(\frac{125}{384}e^5 + \dots \right) \text{sen } 5M$$

Caso quisesse-se poderiam ser usadas propriedades das funções de Bessel, que não serão vistas neste trabalho, para exprimir θ em função de M , mesmo assim mostrar-se-á de forma pouco formal este resultado:

$$\theta = M + \left(2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5 \right) \text{sen } M + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{4}{24}e^4 - \dots \right) \text{sen } 2M + \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5 + \dots \right) \text{sen } 3M + \left(\frac{103}{96}e^4 + \dots \right) \text{sen } 4M + \left(\frac{1097}{960}e^5 + \dots \right) \text{sen } 5M + \dots$$

□

5.4 Biografia de Friedrich Wilhelm Bessel, vida e obra

Friedrich Wilhelm Bessel (figura 21) nasceu em Munique, na Alemanha, a 22 de Julho de 1784 e faleceu a 17 de Março de 1846 em Königsberg. Bessel era filho de um funcionário da administração pública e sua mãe era filha de um pastor de Rhéme. Friedrich pertencia a uma família numerosa constituída por seis garotas e três rapazes. Dois dos seus irmãos foram juízes na corte provincial.

Bessel, aos 15 anos entrou numa firma de exportação e importação. Durante a sua aprendizagem, sonhando em viajar, ele estudou línguas, geografia, costumes de povos distantes e os princípios da navegação, a qual o conduziu para a astronomia e a matemática. Trabalhando à noite, em 1804, escreveu um artigo sobre o cometa Halley no qual calculou a órbita baseando-se nas observações realizadas por Thomas Harriot em 1607. Enviou-as ao astrônomo Wilhelm Olbers que ficou tão impressionado que conseguiu a sua publicação, no mesmo ano, no *Monatliche Correspondenz* (correspondência mensal) e propôs Bessel como assistente no observatório Lilienthal do célebre observador lunar Johann Hieronymus Schröter, isto em 1806. Bessel, que era apreciado pela sua firma comercial, foi obrigado a escolher entre uma posição de relativa riqueza, caso permanece-se na firma, e pobreza se optasse pelas estrelas. Mesmo dividido, acabou por optar por esta última. Em Lilienthal realizou inúmeras

observações de caráter prático, as quais eram sempre acompanhadas de cálculos matemáticos rigorosos. As suas últimas realizações foram possíveis somente porque ele primeiro estabeleceu o enquadramento real do universo estabelecendo medidas rigorosas das posições e movimentos das estrelas mais próximas fazendo correções a vários erros de medidas causados por imperfeições nos seus telescópios e por perturbações na atmosfera. Ele reduziu, ou sistematizou, as observações do astrônomo inglês James Bradley, corrigindo os efeitos de erros instrumentais nas posições de 3.222 estrelas e publicando os resultados no *Fundamenta Astronomiae* (1818); este trabalho marcou o início da astronomia moderna (astronomia posicionada). Depois de Bessel ter passado apenas 4 anos em Lilienthal, o governo Pruciano, Friedrich Wilhelm III, encarregou-o da construção, em Königsberg, do primeiro grande observatório alemão. Em 1810, foi nomeado professor de astronomia da Universidade de Königsberg. Realizou seus trabalhos clássicos sobre a precessão dos equinócios, a mutação, a aberração e a obliquidade da eclíptica. Trabalhou assiduamente na reconstrução de toda a ciência das observações astronômicas dirigindo o observatório desde a data em que ficou pronta (1813) até ao fim da sua vida.



Figura 21.: Selo alemão feito em homenagem a Bessel; ao lado de Bessel gráficos de suas famosas funções.

As suas principais contribuições foram a construção de aparelhos muito precisos para o estudo do posicionamento das estrelas e dos planetas. Ele efetuou a primeira medida estelar, completou o catálogo de 75000 estrelas desde a magnitude 9, das quais muitas foram catalogadas por Maximilien Weisse, sob os auspícios da Academia de Ciências de São Petesburgo. Bessel apurou o cálculo da astronomia e criou novos

métodos de aplicação ao cálculo de perturbação planetária. Descobriu e estudou os movimentos orbitais de Sirius e Procyon, e pressentiu, através de observações sobre a irregularidade dos movimentos de Urano, a existência de um outro planeta até então desconhecido. Todos os seus últimos trabalhos tratam da órbita deste planeta; ele dizia que a sua órbita irregular não podia ser unicamente de Júpiter. A descoberta de Netuno, que ocorreu logo após sua morte confirmou a previsão.

Em geodésia as contribuições de Bessel incluem a correção em 1826 do pêndulo dos segundos cujo comprimento é calculado com precisão de forma que necessita exatamente de um segundo de oscilação. Durante 1831-1832, Bessel dirigiu as medidas geodésicas dos arcos meridianos da Prússia Leste e em 1841 deduziu o valor de $1/299$ da elipse da Terra, isto é, o grau de distorção elíptica pelo qual a forma da Terra se distancia da forma duma esfera perfeita. Ele foi o primeiro a fazer um uso efetivo do heliômetro, um instrumento concebido para medir o diâmetro aparente do Sol. Bessel introduziu observações corrigidas da chamada equação pessoal, um preconceito estatístico nas medidas características do próprio observador que deve ser eliminado antes dos resultados serem considerados confiáveis, e fez um estudo sistemático das causas de erros instrumentais. As suas próprias observações corrigidas eram mais rigorosas que qualquer uma das anteriores e os seus métodos abriram caminhos a grandes avanços nesse campo.

Bessel estabeleceu em *Tabulae Regiomontanae* (1830) o sistema uniforme de redução que permaneceu por muito tempo como modelo, tendo estabelecido posições exatas de milhares de estrelas individuais no seu observatório em Königsberg, ele estava pronto para observar os movimentos entre as estrelas relativas umas às outras, extraordinariamente pequenos mas elevadamente significativos. Escolhendo 61 Cygni, uma estrela pouco visível a olho nu e conhecido por possuir uma velocidade relativamente elevada no plano do céu, Bessel mostrou que depois de corrigir isto a estrela aparentemente movia-se numa elipse todos os anos. Friedrich Wilhelm Bessel desenvolveu métodos de medição da Paralaxe. A medição da paralaxe é usada diretamente para achar a distância de um corpo da Terra (paralaxe geocêntrico) e de um corpo do Sol (paralaxe heliocêntrica). As duas posições do observador e a posição do objeto formam um triângulo. Se a linha de base entre os dois pontos de observação é conhecida e a direção do objeto vista de cada um deles for medida, o ângulo reto

(paralaxe) e a distância a que está o objeto do observador podem ser encontrados facilmente. Na determinação de uma distância no céu através da medição da paralaxe a linha de base, é considerada a mais longa possível de forma a obter a maior precisão de medição. Para o Sol e a Lua a linha de base usada é a distância entre dois pontos largamente distanciados na Terra; para todos os corpos fora do Sistema Solar, a linha de base é o eixo da órbita da Terra. O maior paralaxe medido é 0,76 relativo à estrela mais próxima (Alfa Centuri); o menor paralaxe que pode ser medido diretamente é cerca de 25 vezes menor, mas os métodos indiretos permitem o cálculo da paralaxe inversamente proporcional à distância para objetos cada vez mais distantes mas também com um grau maior de incerteza.

Bessel desenvolveu as famosas funções de Bessel ou funções cilíndricas que tiveram ampla aplicação em matemática, física e aparecem em numerosos problemas de astronomia. Estas funções foram consideradas pela primeira vez por Euler (1766) e Lagrange (1771), mas foi Bessel que em 1824, fez um estudo sistemático delas.

Considerações Finais

O assunto abordado é de primordial importância para a sociedade, tanto que provocou mudanças em crenças religiosas, revolucionou a astronomia, é base para telecomunicações e foi essencial no progresso tecnológico. São várias as aplicações das leis de Kepler, séries de Fourier e funções de Bessel. Coube a este trabalho resumidamente explicitar algumas, entretanto, ele consistiu em dar maior ênfase à matemática da problemática bem como na sua respectiva fundamentação histórica. Sugere-se uma continuação deste estudo mediante um aprofundamento na abordagem das funções de Bessel, explorando propriedades, esboçando gráficos e demais detalhes. Pode-se, também, tentar usar algum método numérico para, segundo a equação de Kepler, achar uma aproximação da função θ e fazer um gráfico desta em relação ao tempo.

A temática é muito interessante e ainda muito estudada, contudo, dificuldades e decepções encontradas neste trabalho, felizmente, foram supridas pelo término da dedução de algumas equações ou da descoberta de um jeito diferente de desenvolver alguma fórmula, como foi o caso da função que define a elipse em coordenadas polares. O fato de se estudar algo relativamente antigo e tão discutido foi cativante e fez com que se valorizasse mais o trabalho dos cientistas envolvidos. Já o cálculo diferencial e integral e as geometrias euclidiana e quantitativa foram uma paixão durante todo o curso de matemática garantindo maior êxito no cumprimento dos objetivos da monografia.

Todo o texto envolvido foi digitado em Word, mesmo sabendo que aprender Látex é indispensável para um matemático, o resultado obtido foi satisfatório. A confecção das figuras foi um desafio no que diz respeito aos detalhes, sutilezas e pelo texto matemático contido nas mesmas. Gráficos foram feitos com auxílio do pacote Derive for Windows que, sem dúvida, proporcionou um contato positivo, possibilitando uma posterior abordagem dos softwares mais conceituados Matlab ou Maple.

Desde criança a idéia de ser um cientista surgia e se espera que este primeiro trabalho científico e a graduação no curso de matemática da UFSC sejam suporte de uma longa caminhada acadêmica. Atualmente, ser um cientista, de modo pessoal, ainda significa desvendar problemas, criar teorias, gastar horas filosofando na frente de um quadro negro e, deste modo, faz tudo parecer tão apaixonante quanto há quatorze anos.

Referências Bibliográficas

1. ANTON, Howard. **Cálculo, um novo horizonte**. Volume 2; Porto Alegre: Bookman, 2000.
2. BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, 3. ed. Rio de Janeiro: Guanabara, 1979.
3. EINSTEIN, A. **Como Vejo o Mundo**, tradução de H. P. De Andrade, 9. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1981.
4. FIGUEIREDO, D. G. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 12 CBM IMPA-RJ, 1979.
5. KELLS, L. M. **Equações Diferenciais Elementares**, 5. ed. McGraw-Hill Book. Co. Inc., 1965.
6. LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 1 e 2; São Paulo: Harbra, 1986.
7. MARION, J. B.; THORNTOM, S. T. **Classical Dynamics of Particles and Systems**, 4. ed. Saunders College Publishing, Philadelphia, 1997.
8. MORAES, Rodolfo Vilhena. **Trajетórias de Veículos Espaciais**. São José dos Campos, ITA – SP.
9. NUSSENZWEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. Volume 1- Mecânica.
10. SIMMONS, George F. **Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 2; São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
11. STEWART, J. **Cálculo**. Volume 1, 4. ed. Tradução IME-USP São Paulo, Pioneira Thomson Learning, 2002.
12. www.mathworld.com acessado em 29/01/2004.
13. <http://www.malhatlantica.pt/mat/historia.html#Bessel> acessado em 07/07/2003.
<http://users.hotlink.com.br/marielli/matematica/geniomat/kepler.html> acessado em 30/10/2003.