Universidade Federal de Santa Catarina
Curso de Graduação em Matemática

Elementos de álgebras de Hopf

por

Paulo Ricardo Boff

sob a orientação de

Dr. Eliezer Batista

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Matemática da Universidade Federal de Matemática para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Florianópolis, dezembro de 2009

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação em Licenciatura em Matemática e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 46 / CCM /09.

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor responsável pela disciplina

Banca examinadora:

Eliezer Batista
(Orientador)

Alcides Buss

Marcelo Muniz Silva Alves - UFPR

Resumo

Neste trabalho apresentamos os elementos que compõem as algebras de Hopf. Definimos álgebras através do conceito de produto tensorial entre $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e, dualizando certos diagramas comutativos, obtemos a definição de coálgebra. Mostramos que o espaço vetorial dual de uma coálgebra admite a estrutura de álgebra, e que o dual finito de uma álgebra, que é um subespaço do espaço vetorial dual de uma álgebra, admite uma estrutura de coálgebra. Definimos biálgebra e álgebra de Hopf, mostramos alguns resultados básicos sobre o assunto, dentre eles, que o dual finito de uma álgebra de Hopf possui uma estrutura de álgebra de Hopf.

Sumário

Introdução

Desenvolvemos neste trabalho os elementos básicos da teoria de Álgebras de Hopf. Para isso, consideramos uma versão mais restrita do que o necessário para a definição de álgebra. As álgebras podem ser definidas de maneira mais geral sobre aneis comutativos com unidade, porém neste contexto não temos a comodidade de trabalhar com produtos tensoriais de espaços vetoriais, que também são espaços vetoriais. Então, optamos por definir álgebra utilizando o conceito de produto tensorial de espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Tal forma nos será mais conveniente na hora de definirmos coálgebras, biálgebras e álgebras de Hopf.

No primeiro capítulo, veremos que coálgebra é uma noção dual de álgebra. O uso do termo "dual"é justificado pelo uso da linguagem categórica. Dualidade refere-se à inversão do sentido dos morfismos em certos diagramas comutativos. Dessa forma, para se dualizar a noção de $\mathbb{K}$-álgebra, é necessário transformar a definição em termos de diagramas. De modo semelhante dualizamos a noção de morfismo de álgebras, obtendo morfismo de coálgebras.

Álgebras e coálgebras não são apenas noções duais. De certo modo, são objetos duais, no setindo de que conseguimos dar uma estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra ao $\mathbb{K}$-espaço vetorial dual C' de uma coálgebra C. No entato, a dualidade de objetos não é geral. Se o espaço dual de uma coálgebra é uma álgebra, não conseguimos atribuir de modo geral uma estrutura de $\mathbb{K}$-coálgebra ao $\mathbb{K}$-espaço vetorial dual A' de uma álgebra A. No caso em que a álgebra A tem dimensão finita, veremos que isto é possível. Quando a álgebra A possui dimensão infinita, veremos que podemos atribuir uma estrutura de coálgebra a um subespaço do espaço dual A', chamado de dual finito da álgebra, cuja dimensão não é necessariamente finita.

No segundo capítulo, estudamos a estrutura de biálgebra, na qual estão presentes as estruturas de álgebra e de coálgebra, com uma certa compatibilidade entre suas operações. Em uma biálgebra, dizer que o produto e a unidade são morfismos de coálgebras é equivalente a dizer que o coproduto e a counidade são morfismos de álgebras. Com isso, damos uma estrutura de biálgebra ao dual finito de uma biálgebra. Em seguida, partimos para o nosso objetivo principal, que é definir álgebras de Hopf. Veremos alguns resultados e construiremos a álgebra de Hopf dual, a partir do dual finito de uma álgebra de Hopf.

Neste trabalho, assumimos como conhecida a teoria básica de grupos, álgebra linear e anéis. No apêndice A, apresentamos alguns resultados sobre produto tensorial que serão utilizados ao longo do texto. No apêndice B, estão alguns resultados a respeito da notação de Sweedler para o coproduto.

Capítulo 1

Álgebras e Coálgebras

1.1 Álgebras

Nesta primeira seção definimos a estrutura primordial da teoria a ser desenvolvida nas seções subsequentes, utilizando principalmente a referência [4]. Em geral, uma álgebra é um espaço vetorial A munido de um produto, isto é, uma aplicação de $A \times A$ a valores em A, bilinear. Neste seção definiremos álgebra de outra forma, a qual nos será mais conveniente na hora de definirmos coálgebras, biálgebras e álgebras de Hopf.

Existem diversos tipos de álgebras, com diferentes tipos de propriedades que as definem. A anti-simetria e a identidade de Jacobi são características das álgebras de Lie. Outros exemplos são as álgebras associativas, para as quais a propriedade adicional é $x(yz) = (xy)z$, e as álgebras unitais (com unidade), para as quais a propriedade adicional é a existência de um elemento 1 tal que $1x = x$. Na maior parte do trabalho estaremos interessados justamente nas álgebras associativas e com unidade.

Definição 1.1.1 *Uma $\mathbb{K}$-álgebra associativa com unidade é uma tripla (A, μ, η), em que A é um espaço vetorial (sobre um corpo $\mathbb{K}$), $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$ e $\eta : \mathbb{K} \longrightarrow A$ são funções lineares tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes id"] \arrow[d, "id \otimes \mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "id \otimes \eta"] \arrow[dr, leftrightarrow, "\simeq"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & \mathbb{K} \otimes A \arrow[l, "\eta \otimes id"'] \arrow[dl, leftrightarrow, "\simeq"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Chamamos μ de multiplicação ou produto e η de unidade. O primeiro diagrama comutativo representa a associatividade da álgebra, que em símbolos é o mesmo que

$$\mu \circ (\mu \otimes id) = \mu \circ (id \otimes \mu). \tag{1.1}$$

O segundo diagrama comutativo significa que

$$\mu \circ (\eta \otimes id) = \mu \circ (id \otimes \eta) = id. \tag{1.2}$$

Essa definição pode parecer estranha à primeira vista. De fato, é mais fácil e intuitivo definir $\mathbb{K}$-álgebra como sendo um anel A que tem uma estrutura de $\mathbb{K}$-espaço vetorial tal que a multiplicação é uma aplicação bilinear. Ou seja,

Definição 1.1.2 *Seja A um corpo, dizemos que um anel com unidade $(A, +, \cdot)$ é uma* álgebra *sobre $\mathbb{K}$ se A for um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ tal que a multiplicação é uma aplicação bilinear sobre $\mathbb{K}$.*

Proposição 1.1.3 *As duas definições de álgebra acima são equivalentes.*

Prova. Para mostrar que a definição 1.1.1 implica na definição 1.1.2 , basta definir a multiplicação por $a \cdot b = \mu(a \otimes b)$ e a unidade por $1_A = \eta(1)$. Segue das propriedades de produto tensorial que a multiplicação é bilinear, além disso os diagramas comutativos nos dão as propriedades de associatividade e unidade.

Reciprocamente, se temos a definição 1.1.2, o fato da multiplicação ser bilinear implica que podemos estendê-la para μ no produto tensorial, de modo que a associatividade em A nos dá o primeiro diagrama comutativo da definição 1.1.1. A aplicação η é definida por $\eta(\lambda) = \lambda 1_A$ para $\lambda \in \mathbb{K}$, onde 1_A é a unidade da álgebra. O outro diagrama segue de imediato da definição de unidade.

□

Em vista desta proposição, confundiremos propositalmente a nomenclatura do produto tanto como sendo a aplicação usual $\cdot : A \times A \longrightarrow A$, quanto como sendo a aplicação μ. Para simplificar, a partir de agora falaremos apenas álgebra, sem fazer menção ao corpo, que ficará subentendido. E quando mencionarmos simplesmente uma "álgebra A"estaremos nos referindo a álgebra (A, μ, η), deixando as funções μ e η subentendidas no contexto.

Exemplo 1.1.4 *Todo corpo $\mathbb{K}$ é uma álgebra associativa com unidade sobre si mesmo.*

Exemplo 1.1.5 *Dado um espaço vetorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{K}$, considere o conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ dos operadores lineares $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$. Note que, considerando $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ com a soma definida ponto a ponto e a multiplicação dada pela composição de operadores , não é difícil ver que $\mathcal{L}(\mathbb{V})$ é uma álgebra associativa sobre $\mathbb{K}$, cujo elemento unidade é dado pelo operador identidade.*

Exemplo 1.1.6 *(*Álgebra produto tensorial*) Seja τ a aplicação $flip$, i.é, $\tau : A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$ o isomorfismo dado por $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ conforme a proposição A.2.3. Caso τ tenha sub-índices, estes denotarão quais parcelas estão sendo trocadas num produto tensorial de vários espaços vetoriais, por exemplo, a função*

$$\tau_{23} : A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 \otimes A_4 \quad \longrightarrow \quad A_1 \otimes A_3 \otimes A_2 \otimes A_4$$

é dada nos geradores por $\tau_{23}(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3 \otimes a_4) = a_1 \otimes a_3 \otimes a_2 \otimes a_4$. Agora para álgebras A e B, tome o espaço vetorial $A \otimes B$ e defina o produto

$$\mu_{A \otimes B} : (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) \longrightarrow A \otimes B$$

dado nos geradores por $\mu_{A\otimes B}((a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2)) = (\mu_A\otimes\mu_B)\circ\tau_{23}((a_1\otimes b_1)\otimes(a_2\otimes b_2)) = (\mu_A\otimes\mu_B)((a_1\otimes a_2)\otimes(b_1\otimes b_2)) = a_1a_2\otimes b_1b_2$ *e unidade* $\eta_A(1)\otimes\eta_B(1) = 1_A\otimes 1_B$. *Para verificar que* $\mu_{A\otimes B}$ *está bem definida basta notar que a função* $f : A\times B\times A\times B \longrightarrow A\otimes B$, *dada por* $f(a_1, b_1, a_2, b_2) = a_1a_2\otimes b_1b_2$ *é quadrilinear, logo pode ser estendida para o produto tensorial (pela proposição A.2.8). Esta álgebra é chamada de* álgebra produto tensorial *entre A e B.*

Exemplo 1.1.7 *(*Álgebra oposta A^{op}*) Seja* (A, μ, η) *uma álgebra. Defina a função* $\mu^{op} = \mu\circ\tau$, *em que* $\tau(a\otimes b) = b\otimes a$. *Temos então que* (A, μ^{op}, η) *é uma álgebra. De fato,* μ^{op} *atua da senguinte maneira:*

$$\mu^{op}(x\otimes y) = yx.$$

Assim verifica-se facilmente que

$$\mu^{op}\circ(id\otimes\mu^{op}) = \mu^{op}\circ(\mu^{op}\otimes id)$$

e

$$\mu^{op}\circ(\eta\otimes id) = \mu^{op}\circ(id\otimes\eta) = id$$

Denotamos esta álgebra por A^{op} *e chamamos de* álgebra oposta *à álgebra A. Note que uma condição necessária e suficiente para que uma álgebra A seja comutativa é que* $\mu = \mu^{op}$.

Exemplo 1.1.8 *(Álgebra de funções) Seja* $\mathbb{K}$ *um corpo e X um conjunto não-vazio qualquer. Defina* $\mathcal{F}(X)$ *como o conjunto de todas as funções* $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$. *Dados* $f, g\in\mathcal{F}(X)$ *e* $k\in\mathbb{K}$, *defina* $f+g$ *e* kf *por:*

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x), \forall x\in X\\ (kf)(x) &= kf(x), \forall x\in X.\end{aligned}$$

Agora defina

$$\begin{aligned}\mu : \mathcal{F}(X)\otimes\mathcal{F}(X) &\longrightarrow \mathcal{F}(X)\\ f\otimes g &\longmapsto f\cdot g,\end{aligned}$$

em que $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x), \forall x\in X$. *Com estas operações e considerando a função constante* $\mathbf{1}(x) = 1$, $(\mathcal{F}(X), \mu, \mathbf{1})$ *é uma álgebra associativa com unidade sobre* $\mathbb{K}$, *sendo o elemento unidade a função constante* $\mathbf{1}$. *De fato,*

$$\begin{aligned}&\mu\circ(id\otimes\mu)(f\otimes g\otimes h)(x) = f(x)\cdot(g(x)\cdot h(x))\\ =\ &(f(x)\cdot g(x))\cdot h(x) = \mu\circ(\mu\otimes id)(f\otimes g\otimes h)(x), \forall x\in X.\end{aligned}$$

Onde utilizamos a associatividade do corpo $\mathbb{K}$. *E também temos*

$$\mu\circ(\mathbf{1}\otimes f)(x) = \mathbf{1}(x)\cdot f(x) = 1\cdot f(x) = f(x).$$

Exemplo 1.1.9 *(Álgebra de grupo $\mathbb{K}G$) Seja G um grupo e $\mathbb{K}G$ o espaço vetorial das funções de G em $\mathbb{K}$ com suporte finito, em que a soma e o produto por escalar são definidos ponto a ponto. Em seguida, para cada $g \in G$ defina $\delta_g : G \longrightarrow \mathbb{K}$, em que $\delta_g(h) = \delta_{g,h} = o$ se $g \neq h$ e $\delta_g(h) = \delta_{g,h} = 1$ se $g = h$. Note que $\{\delta_g\}_{g\in G}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{K}G$. De fato, defina $f = \sum_{g\in G} a_g\delta_g$, em que $a_g \in \mathbb{K}$ para todo $g \in G$, e suponha que $f = \sum_{g\in G} a_g\delta_g = 0$. Então, pela definição de δ_g, $f(h) = \sum_{g\in G} a_g\delta_g(h) = a_h = 0$. Logo, para todo $h \in G$, $a_h = 0$. Dessa forma $\{\delta_g\}_{g\in G}$ é uma base para $\mathbb{K}G$.*

Agora, considere a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rcl} * : \mathbb{K}G \times \mathbb{K}G & \longrightarrow & \mathbb{K}G \\ (a, b) & \longmapsto & a * b \end{array}$$

em que

$$(a * b)(g) = \sum_{\substack{h,l\in G \\ hl=g}} a(h)b(l), \;\; g \in G.$$

Para $a, b, c \in \mathbb{K}G$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $g \in G$, temos que

$$\begin{array}{rcl} (a * (b + \lambda c))(g) & = & \displaystyle\sum_{\substack{h,l\in G \\ hl=g}} a(h)(a + \lambda c)(l) = \sum_{\substack{h,l\in G \\ hl=g}} a(h)b(l) + \lambda \sum_{\substack{h,l\in G \\ hl=g}} a(h)c(l) \\ & = & ((a * b) + \lambda(a * c))(g), \end{array}$$

ou seja, $*$ é bilinear. Note também, que se $e \in G$ é a unidade em G então δ_e é a unidade relativa à $*$ em $\mathbb{K}G$. De fato, dados $a \in \mathbb{K}G, g \in G$, temos que $(a * \delta_e)(g) = \sum_{hl=g} a(h)\delta_e(l) = a(g)$, sendo o outro lado análogo. Estendendo $*$ para o produto tensorial, definimos a multiplicação μ por $\mu(a\otimes b)(g) = (a*b)(g)$ para $a, b \in \mathbb{K}G, g \in G$, e a aplicação η por

$$\begin{array}{rcl} \eta : \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K}G \\ \lambda & \longmapsto & \eta(\lambda) = \lambda\delta_e. \end{array}$$

Mostremos com isso que $(\mathbb{K}G, *, \delta_e)$ é uma álgebra. Com efeito, dados $a, b, c \in \mathbb{K}G, g \in G$, temos a associatividade:

$$\begin{aligned}(a*(b*c))(g) &= \sum_{\substack{h,l\in G\\ hl=g}} a(h)(b*c)(l) = \sum_{\substack{h,l\in G\\ hl=g}} a(h)\left(\sum_{\substack{x,y\in G\\ xy=l}} b(x)c(y)\right)\\ &= \sum_{\substack{h,x,y\in G\\ h(xy)=g}} a(h)b(x)c(y) = \sum_{\substack{h,x,y\in G\\ (hx)y=g}} a(h)b(x)c(y)\\ &= \sum_{\substack{u,y\in G\\ uy=g}} \left(\sum_{\substack{h,x\in G\\ hx=u}} a(h)b(x)\right) c(y)\\ &= \sum_{\substack{u,y\in G\\ uy=g}} (a*b)(u)c(y) = ((a*b)*c)(g).\end{aligned}$$

A unidade já mostramos acima. Esta álgebra é chamada álgebra de grupo.

Definição 1.1.10 *Seja A uma álgebra. Um espaço vetorial $B \subseteq A$ é dito uma subálgebra se $\mu(B \otimes B) \subseteq B$.*

Observação 1.1.11 *Note que (B, μ_B, η_B) é uma álgebra, com $\mu_B = \mu|_B$ e $\eta_B = \eta|_B$.*

Definição 1.1.12 *Um subespaço I de uma álgebra A é dito:*
(i) um ideal à esquerda *(à direita) se $\mu(A \otimes I) \subseteq I$ (respect. $\mu(I \otimes A) \subseteq I$).*
(ii) um ideal *se $\mu(A \otimes I + I \otimes A) \subseteq I$.*

Definição 1.1.13 *Sejam A e B álgebras. Diremos que $f : A \longrightarrow B$ é um* morfismo de álgebras *se f é uma função linear, $f \circ \mu_A = \mu_B \circ (f \otimes f)$ e $f \circ \eta_A = \eta_B$.*

$$\begin{tikzcd} A\otimes A \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "f\otimes f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B\otimes B \arrow[r, "\mu_B"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ \mathbb{K} \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] & \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.1.14 *Seja $f : A \longrightarrow B$ um morfismo de álgebras. Então $Im(f)$ é uma subálgebra de B e $ker(f)$ é um ideal de A. Com efeito, como f é morfismode álgebras, $f\mu_A = \mu_B(f \otimes f)$. Logo,*

$$\begin{aligned}&\mu_B(Im(f)\otimes Im(f)) = \mu_B(f(A)\otimes f(A))\\ &= (\mu_B(f\otimes f))(A\otimes A) = (f\mu_A)(A\otimes A)\\ &= f(\mu_A(A\otimes A)) \subseteq f(A) = Im(f).\end{aligned}$$

E para mostrar que $ker(f)$ é ideal de A, note que

$$(\mu_B(f\otimes f))(ker(f\otimes f)) = \mu_B((f\otimes f)(ker(f\otimes f))) = \{0\}$$

o que, pelo fato de f ser morfismo de álgebras, implica em $(f\mu_A)(ker(f \otimes f)) = f(\mu_A(ker(f \otimes f))) = \{0\}$. Logo, $\mu_A(ker(f \otimes f)) \subseteq ker(f)$. Donde, pela proposição A.2.10, segue que $\mu_A(ker(f) \otimes A + A \otimes ker(f)) \subseteq ker(f)$. Portanto $ker(f)$ é ideal de A.

Exemplo 1.1.15 *(Álgebra de funções coordenadas) Para A uma álgebra qualquer costruímos a álgebra das matrizes $n \times n$ por $M_n(A) = \{(a^i_j)_{i \in I_n, j \in I_n}; a_{ij} \in A\}$ com o produto*

$$(ab)^i_j = \sum_{k=1}^{n} a^i_k b^k_j.$$

Em particular se $A = \mathbb{K}$ temos que $M_n(\mathbb{K})$ é o espaço vetorial de dimensão n^2 que tem como base o conjunto das matrizes E_{ij} que têm 1 na entrada ij e zero em todas as outras. O dual álgebrico $(M_n(\mathbb{K}))'$ tem como base dual as funções coordenadas $u^i_j(a) = a^i_j$. Observe que $(M_n(\mathbb{K}))' \subseteq \mathcal{F}(M_n(\mathbb{K}))$ sendo este último a álgebras das funções de $M_n(\mathbb{K})$ em $\mathbb{K}$. Então definimos a álgebra de funções coordenadas $\mathbb{K}\langle u^i_j \rangle$ como a subálgebra (da álgebra de funções) gerada pelas funções u^i_j.

Proposição 1.1.16 *Se A é uma álgebra, I um ideal de A e $\pi : A \longrightarrow \dfrac{A}{I}$ a projeção canônica de espaços vetoriais, então:*

(i) existe uma única estrutura de álgebra sobre $\dfrac{A}{I}$ tal que π é um morfismo de álgebras.

(ii) se $f : A \longrightarrow B$ é um morfismo de álgebras tal que $I \subseteq ker(f)$, então existe um único morfismo de álgebras $\bar{f} : \dfrac{A}{I} \longrightarrow B$ de modo que $\bar{f}\pi = f$.

Prova. Basta notar que pela proposição A.2.10 e pelo fato de I ser ideal de A, temos que $\mu(ker(\pi \otimes \pi)) = \mu(I \otimes A + A \otimes I) \subseteq I$. Logo, pela versão mais geral do Teorema do Homomorfismo para espaços vetoriais, existe uma única função linear $\bar{\mu} : \dfrac{A}{I} \otimes \dfrac{A}{I} \longrightarrow \dfrac{A}{I}$ tal que o seguinte diagrama comute:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\pi \otimes \pi"] \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, "\pi\mu"] & \dfrac{A}{I} \otimes \dfrac{A}{I} \arrow[d, "\bar{\mu}"] \\
A \arrow[r, "\pi"'] & \dfrac{A}{I}
\end{tikzcd}$$

Dessa forma, $\bar{\mu}$ é tal que $\bar{\mu}(\bar{a} \otimes \bar{b}) = \pi\mu(a \otimes b) = \overline{ab}, \forall \bar{a}, \bar{b} \in \dfrac{A}{I} \otimes \dfrac{A}{I}$, em que $\bar{a} = a + I = \pi(a), \forall a \in A$. Com isso é fácil ver que

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}(id \otimes \bar{\mu})(\bar{a} \otimes \bar{b} \otimes \bar{c}) &= \bar{\mu}(\bar{a} \otimes (\overline{bc})) = \overline{a(bc)} = \overline{(ab)c} = \bar{\mu}((\overline{ab}) \otimes \bar{c}) \\
&= \bar{\mu}(\bar{\mu} \otimes id)(\bar{a} \otimes \bar{b} \otimes \bar{c}), \quad \forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \frac{A}{I}.
\end{aligned}$$

Segue que $\bar{\mu}$ é associativa.

De modo análogo, existe uma única função linear $\bar{\eta} : \mathbb{K} \longrightarrow \dfrac{A}{I}$ tal que o seguinte diagrama seja comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[r, "\bar{\eta}"] \arrow[d, "\eta"'] & \dfrac{A}{I} \\
A \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Com isso, é fácil ver que para quaisquer $k \in \mathbb{K}$ e $a \in A$ temos que $\bar{\eta}$ é uma unidade para $\dfrac{A}{I}$, ou seja,

$$\bar{\mu}(id \otimes \bar{\eta})(\bar{a} \otimes k) = \mu(\bar{\eta} \otimes id)(k \otimes \bar{a}),$$

e portanto $(A/I, \bar{\mu}, \bar{\eta})$ é uma álgebra.

(ii) Novamente, usando o Teorema do Homomorfismo para espaços vetoriais, existe uma (única) função linear $\bar{f} : \dfrac{A}{I} \longrightarrow B$ tal que $\bar{f}\pi = f$, com $\bar{f}(\bar{a}) = f(a)$, para qualquer $a \in A$. Como f é morfismo de álgebras,

$$\begin{aligned}
(\bar{f}\bar{\mu})(\bar{a} \otimes \bar{b}) = \bar{f}(\bar{\mu}(\bar{a} \otimes \bar{b})) &= \bar{f}(\pi(\mu(a \otimes b))) = \bar{f}(\overline{ab}) = f(ab) = f(\mu_A(a \otimes b)) \\
&= f\mu_A(a \otimes b) = \mu_B(f \otimes f)(a \otimes b) = \mu_B(f(a) \otimes f(b)) \\
&= \mu_B(\bar{f}(\bar{a}) \otimes \bar{f}(\bar{b})) = \mu_B(\bar{f} \otimes \bar{f})(\bar{a} \otimes \bar{b}), \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in \frac{A}{I}
\end{aligned}$$

e

$$\bar{f}(\bar{\eta}(k)) = \bar{f}(\pi(\eta_A(k))) = \bar{f}(\overline{k1}) = f(\eta_A(k)) = \eta_B(k), \quad \forall k \in \mathbb{K}.$$

Portanto, $\bar{f}$ é morfismo de álgebras.

$\square$

Corolário 1.1.17 *Seja $f : A \longrightarrow B$ um morfismo de álgebras. Então $\bar{f} : \dfrac{A}{ker(f)} \longrightarrow Im(f)$ é um isomorfismo.*

$\square$

Agora, falaremos de que trata a álgebra livre.

Seja X um conjunto e denote $I_n = \{1, ..., n\}$. Uma palavra de tamanho n em X é uma função $f : I_n \longrightarrow X$. No caso em que n é zero em I_n a palavra será a função vazio. Considere $K\{X\}$ o espaço vetorial gerado por todas as palavras e defina um produto em $K\{X\}$ da seguinte forma:

primeiro definimos a concatenação de duas palavras $f : I_n \longrightarrow X$ e $g : I_m \longrightarrow X$ como sendo $fg : I_{n+m} \longrightarrow X$, com $fg(i) = f(i)$ para $1 \leq i \leq n$ e $fg(n+j) = g(j)$ para $1 \leq j \leq m$. Para cada palavra f defina uma transfomação linear $\mu_f : K\{X\} \longrightarrow K\{X\}$ que na base formada pelas palavras é dada exatamente pela concatenação, i.é, $\mu_f(g) = fg$ se g é uma palavra. Em seguida definimos uma função $\bar{\mu} : K\{X\} \longrightarrow Lin(K\{X\}, K\{X\})$ que nas palavras é dada por $\bar{\mu}(f) = \mu_f$. Por fim definimos a multiplicação como sendo $\mu : K\{X\} \otimes K\{X\} \longrightarrow K\{X\}$ por $\mu(x \otimes y) = \bar{\mu}(x)(y)$ para $x, y \in K\{X\}$ que é bilinear por construção. Note que a concatenação de palavras é associativa donde segue que a multiplicação também o é, e que a palavra vazia é a unidade. Denotaremos as palavras de um conjunto X por $x_1x_2...x_n$ e a concatenação por $(x_1x_2...x_n)(y_1y_2...y_m) = x_1x_2...x_ny_1y_2...y_m$. Chamamos $K\{X\}$ de *álgebra livre*.

Agora veremos que a álgebra livre $K\{X\}$ satisfaz uma propriedade universal. Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}$, então temos a

Proposição 1.1.18 *(Propriedade universal da álgebra livre) Dadas A uma álgebra e $f : X \longrightarrow A$ uma função, existe um único morfismo $\bar{f} : K\{X\} \longrightarrow A$ tal que $\bar{f}(x) = f(x)$. Ou seja, o seguinte diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & A \\
K\{X\} \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

onde i é a inclusão canônica.

Prova. É suficiente definir $\bar{f}$ nas palavras e estender linearmente para $K\{X\}$. Dada uma palavra $x_1x_2...x_n$ de X, defina $\bar{f}(x_1x_2...x_n) = f(x_1)f(x_2)...f(x_n)$ e defina $\bar{f}(\emptyset) = 1_A$. Com isso, é fácil verificar que $\bar{f} \circ \mu_{K\{X\}} = \mu_A \circ (\bar{f} \otimes \bar{f})$, donde segue que $\bar{f}$ é morfismo de álgebras. Se existir outro morfismo $g : K\{X\} \longrightarrow A$, tal que $g \circ i = f$, teremos que $g(x_1x_2 \cdots x_n) = g(x_1)g(x_2) \cdots g(x_n) = (g \circ i)(x_1)(g \circ i)(x_2) \cdots (g \circ i)(x_n) = f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n) = \bar{f}(x_1x_2 \cdots x_n)$. Portanto $\bar{f}$ é unico.

□

Para ver que toda álgebra A é o quociente de uma álgebra livre, consideramos a álgebra livre $K\{A\}$ e a função identidade $id : A \longrightarrow A$; usamos a propriedade universal para obter um morfismo $\overline{id} : K\{A\} \longrightarrow A$. De modo que $I = ker(\overline{id})$ é um ideal de $K\{A\}$. Pelo corolário 1.1.17, segue-se que $A \simeq K\{A\}/I$. Em outras palavras, temos a comutatividade do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & K\{A\} \arrow[dd, "\overline{id}"] \arrow[dr, "\pi"] & \\
A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "id"'] & & K\{A\}/ker(\overline{id}) \arrow[dl, "\simeq"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 1.1.19 *Seja $X = \{x_1, x_2, ...x_n\}$ um conjunto finito e considere I o ideal de $K\{X\}$ gerado pelo elementos da forma $x_i x_j - x_j x_i$, então $K\{X\}/I$ é exatamente a álgebra polinomial de n variáveis $K[x_1, ...x_n]$.*

Existem muitas maneiras de contruir álgebras e uma delas é através da álgebra tensorial.

Definição 1.1.20 *(Álgebra tensorial) Seja V um espaço vetorial e defina:*

$$V^{\otimes 0} = \mathbb{K}, \ \ V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{n \ \ vezes}, \ \ \forall n \geq 1.$$

Considere $T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} V^{\otimes n}$. Este produto tensorial induz uma estrutura de álgebra em $T(V)$ definida por:

$$(x_1 \otimes ... \otimes x_n)(x_{n+1} \otimes ... \otimes x_{n+m}) = x_1 \otimes ... \otimes x_n \otimes x_{n+1} \otimes ... \otimes x_{n+m}$$

onde $1 \in \mathbb{K}$ é a unidade.

Observe que pela maneira como definimos $T(V)$, não e difícil de ver que $T(V)$ é a álgebra livre gerada por todas as palavras construidas com os elementos da base de V. Com isso, note que a álgebra tensorial $T(V)$ possui caráter universal, isto é, para toda $f : V \longrightarrow A$, onde A é uma álgebra associativa, existe um único morfismo de álgebra $\bar{f} : T(V) \longrightarrow A$ tal que $f = \bar{f} \circ i$, em que i é a inclusão canônica $i : V \longrightarrow T(V)$.

Podemos agora construir outras álgebras como quociente desta álgebra tensorial por algum ideal bilateral.

Exemplo 1.1.21 *(Álgebra comutativa) Seja V um espaço vetorial e defina*

$$S(V) = T(V)/I$$

em que $I =< x \otimes y - y \otimes x >$.

$S(V)$ é uma álgebra comutativa. De fato, o quociente indica que $x \otimes y = y \otimes x$, segue disto que,

$$x_1 \otimes ... \otimes x_n \otimes x_{n+1} ... \otimes x_{n+m} = x_{n+m} \otimes ... \otimes x_{n+1} \otimes x_n \otimes ... \otimes x_1$$

,

onde as trocas são feitas entre vizinhanças sucessivas vezes. Esta álgebra também é chamada de álgebra simétrica.

Definição 1.1.22 *Uma par $(\mathfrak{g}, [,])$, onde $\mathfrak{g}$ é um espaço vetorial e $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ é uma função bilinear chamada* comutador ou colchete de Lie*, é dito uma* álgebra de Lie *se $[,]$ satisfaz:*

(i) $[x, y] = -[y, x] \ \ \forall x, y \in \mathfrak{g}$ (antisimetria);

(ii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ (identidade de Jacob).

Se $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ são álgebras de Lie, então uma função $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie se $[f(x), f(y)] = f([x, y]), \forall x, y \in \mathfrak{g}$.

Exemplo 1.1.23 *Se A é uma álgebra (associativa) sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica diferente de 2, então $L(A) = (A, [,])$, onde o comutador é dado por $[x, y] = xy - yx$ para quaisquer $x, y \in A$, é uma álgebra de Lie. Esta verificação é puramente operacional. Mostremos que $[x+y, z] = [x, z]+[y, z]$. Com efeito, pela associatividade de A temos que*

$$\begin{aligned} [x+y, z] &= (x+y)z - z(x+y) = xz + yz - zx - zy \\ &= xz - zx + yz - zy = [x, z] + [y, z] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} &[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] \\ &= (x(yz - zy) - (yz - zy)x) \\ &+(y(zx - xz) - (zx - xz)y) \\ &+(z(xy - yx) - (xy - yx)z) \\ &= (xyz - xzy - yzx + zyx) \\ &+(yzx - yxz - zxy + xzy) \\ &+(zxy - zyx - xyz + yxz) = 0. \end{aligned}$$

e claramente a antisimetria $[x, y] = -[y, x]$ é satisfeita.

Como consequencia da antisimetria e do fato de $\mathbb{K}$ possuir característica diferente de 2, também temos que

$$[x, y] = [y, x] \Longleftrightarrow [x, y] = -[x, y] \Longleftrightarrow 2[x, y] = 0 \Longleftrightarrow [x, y] = 0.$$

Isso mostra que, a menos que $[,] = 0$, a álgebra $L(A)$ não é comutativa. Por outro lado se $x, y \in L(A)$ são tais que $[x, y] = 0$, então

$$0 = [x, y] = xy - yx \Longleftrightarrow xy = yx.$$

Portanto, $\forall x, y \in L(A)$

$$[x, y] = 0 \Longleftrightarrow xy = yx,$$

o que significa que $L(A)$ é comutativa se, e somente se, A também é.

Para estudar uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no contexto das álgebras, pode-se construir uma álgebra na qual $\mathfrak{g}$ está imersa, e cujo comutador de $\mathfrak{g}$ é dado pelo comutador da álgebra. Para isso, tome na álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ o ideal bilateral $I(\mathfrak{g})$ gerado por expressões do tipo $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, onde $x, y \in \mathfrak{g}$. O espaço quociente $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/I(\mathfrak{g})$ munido com as funções

$$\begin{aligned} \mu : U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) &\longrightarrow U(\mathfrak{g}) \\ (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n + I(\mathfrak{g})) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_m + I(\mathfrak{g})) &\longmapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_m + I(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{K} &\longrightarrow U(\mathfrak{g}) \\ k &\longmapsto k \cdot 1 + I(\mathfrak{g}) \end{aligned}$$

é uma álgebra. De fato, basta ver que é a mesma estrutura determinada pela proposição 1.1.16.

Definição 1.1.24 *A álgebra $(U(\mathfrak{g}), \mu, \eta)$ acima é denominada álgebra envolvente universal.*

Observação 1.1.25 *Vale observar que existe uma injeção de $\mathfrak{g}$ em $U(\mathfrak{g})$. Basta notar que a intersecção do núcleo da projeção de $T(\mathfrak{g})$ em $U(\mathfrak{g})$, que coincide com $I(\mathfrak{g})$, com a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é o zero. Com efeito, seja $\{e_i\}_{i\in\Lambda}$ uma base para $\mathfrak{g}$ em que Λ é um conjunto de índices totalmente ordenados. Note que um elemento $c \in I(\mathfrak{g})$ pode ser escrito como uma soma finita da forma $c = \sum_{i<j\in\Lambda} x_{ij} \otimes (e_j \otimes e_i - e_i \otimes e_j - [e_j, e_i]) \otimes y_{ij}$ onde $x_{ij}, y_{ij} \in T(\mathfrak{g})$. Pela proposição A.2.5, temos que $\sum_{i<j\in\Lambda} x_{ij} \otimes (e_j \otimes e_i - e_i \otimes e_j)$ $\otimes y_{ij} = 0$ se e somente se $x_{ij} = 0$ ou $y_{ij} = 0$ para todo par de índices (i, j), mas neste caso temos $c = 0$. Portanto, supondo c não nulo, temos que c sempre possui um somando da forma $x_{ij} \otimes (e_j \otimes e_i - e_i \otimes e_j)$ ou da forma $(e_j \otimes e_i - e_i \otimes e_j) \otimes y_{ij}$, portanto não pertence a $\mathfrak{g}$.*

Além do mais, a álgebra envolvente universal, como o próprio nome sugere, possui uma propriedade universal que é a seguinte: se $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow A$ é uma aplicação linear numa álgebra associativa A com $\varphi([x, y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x) = [\varphi(x), \varphi(y)]$, então existe um único morfismo de álgebras $\overline{\varphi} : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ tal que $\overline{\varphi}|_{\mathfrak{g}} = \varphi$. De fato, pela proposição 1.1.18 existe um único morfismo de álgebras $\tilde{\varphi} : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow A$ tal que $\tilde{\varphi}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \varphi(x_1)...\varphi(x_n)$ para $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \in T(\mathfrak{g})$. A propriedade exigida de φ nos garante que

$$\tilde{\varphi}(xy - yx - [x, y]) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x) - \varphi([x, y]) = 0$$

ou seja, $ker(\tilde{\varphi}) = I(\mathfrak{g})$ e portanto podemos passar $\tilde{\varphi}$ para $\overline{\varphi}$ no quociente. Em outras palavras, temos a comutatividade do diagrama a baixo

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & T(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, "\tilde{\varphi}"'] \\ A & U(\mathfrak{g}) \arrow[l, "\overline{\varphi}"] \end{tikzcd}$$

1.2 Coálgebras

Para esta seção, utilizamos principalmente a referência [4].

A importância de se definir álgebra via diagramas está no fato de que os diagramas podem ser dualizados, invertentendo o sentido dos morfismos. Assim, obtemos a definição de coálgebra por dualização da definição de álgebra.

Definição 1.2.1 *Uma coálgebra (C, Δ, ε) é um espaço vetorial C munido de duas funções lineares $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ e $\varepsilon : C \longrightarrow \mathbb{K}$ tais que os seguintes diagramas são comutativos:*

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "id\otimes\Delta"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "\Delta\otimes id"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \otimes C \arrow[dr, "\simeq"'] & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon\otimes id"'] \arrow[r, "id\otimes\varepsilon"] & C \otimes \mathbb{K} \\
 & C \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

A função Δ é chamada de coproduto e a função ε de counidade. O primeiro diagrama comutativo é a propriedade de coassociatividade

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta \tag{1.3}$$

e o outro diagrama comutativo é o axioma da counidade

$$(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = id \tag{1.4}$$

Observação 1.2.2 *Ao longo deste trabalho, utilizaremos a notação de Sweedler para coproduto. Se c é um elemento de C, então o elemento $\Delta(c) \in C \otimes C$ é uma soma finita*

$$\Delta(c) = \sum_i c_{1_i} \otimes c_{2_i}, \qquad c_{1_i}, c_{2_i} \in C. \tag{1.5}$$

Mas, pelas propriedades do produto tensorial, sabemos que esta representação para $\Delta(c)$ não é única. Para simplificar a notação, iremos omitir o índice i e escreveremos a soma (1.5) simbolicamente por

$$\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}. \tag{1.6}$$

A notação de Sweedler é amplamente utilizada em textos envolvendo álgebras de Hopf, e várias demonstrações são mais claras utilizando esta notação. Usando a notação de Sweedler, a coassociatividade do coproduto é escrita como

$$\begin{aligned}
\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)} &= \sum c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} \\
&= \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)},
\end{aligned}$$

e o axioma da counidade na notação de Sweedler é expresso por

$$\sum \varepsilon(c_{(1)}) c_{(2)} = c = \sum c_{(1)} \varepsilon(c_{(2)}). \tag{1.7}$$

Para o leitor não familiarizado com a notação de Sweedler para o coproduto, o apêndice B deste trabalho trás uma explicação mais detalhada a respeito desta notação.

Agora, vejamos alguns exemplos de coálgebras.

Exemplo 1.2.3 *Todo espaço vetorial V possui uma estrutura trivial de coálgebra. Basta definir $\Delta(v) = v \otimes v$ e $\varepsilon(v) = 1, \forall v \in V$. Verifiquemos que a coassociatividade 1.3 e a counidade 1.4 são satisfeitas. Por linearidade, basta verificar para qualquer $v \in V$. Então para $v \in V$ temos que*

$$(id \otimes \Delta) \circ \Delta(v) = (id \otimes \Delta)(v \otimes v) = v \otimes (v \otimes v)$$
$$= (v \otimes v) \otimes v = (\Delta \otimes id)(v \otimes v) = (\Delta \otimes id) \circ \Delta(v).$$

e

$$(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta(v) = (id \otimes \varepsilon)(v \otimes v) = v \otimes 1$$
$$= 1 \otimes v = (\varepsilon \otimes id)(v \otimes v) = (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta(v).$$

Exemplo 1.2.4 *Dadas duas coálgebras A e B, a coálgebra produto tensorial $A \otimes B$ é a coálgebra construida sobre o espaço vetorial $A \otimes B$ com coproduto $\Delta_{A\otimes B} = (id \otimes \tau \otimes id) \circ (\Delta_A \otimes \Delta_B)$ e counidade $\varepsilon = \varepsilon_A \otimes \varepsilon_B$. Mostremos que os diagramas da coassociatividade e o da counidade são comutativos. Com efeito, para $a \otimes b \in A \otimes B$ temos*

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta_{A\otimes B})\Delta_{A\otimes B}(a \otimes b) &= (id \otimes \Delta_{A\otimes B})((a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{(2)})) \\
&= (a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes ((a_{(2)(1)} \otimes b_{(2)(1)}) \otimes (a_{(2)(2)} \otimes b_{(2)(2)})) \\
&= (a_{(1)(1)} \otimes b_{(1)(1)}) \otimes ((a_{(1)(2)} \otimes b_{(1)(2)}) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{(2)})) \\
&= (\Delta_{A\otimes B} \otimes id)((a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{(2)})) \\
&= (\Delta_{A\otimes B} \otimes id)\Delta_{A\otimes B}(a \otimes b)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(id \otimes \varepsilon_{A\otimes B})\Delta_{A\otimes B}(a \otimes b) &= (id \otimes \varepsilon_{A\otimes B})((a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{(2)})) \\
&= (a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes (\varepsilon_A(a_{(2)}) \otimes \varepsilon_B(b_{(2)})) \\
&= a_{(1)}\varepsilon_A(a_{(2)}) \otimes b_{(1)}\varepsilon_B(b_{(2)}) \\
&= a \otimes b \\
&= \varepsilon_A(a_{(1)})a_{(2)} \otimes \varepsilon_B(b_{(1)})b_{(2)} \\
&= (\varepsilon_A(a_{(1)}) \otimes \varepsilon_B(b_{(1)})) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{(2)}) \\
&= (\varepsilon_{A\otimes B} \otimes id)((a_{(1)} \otimes b_{(1)}) \otimes (a_{(2)} \otimes b_{(2)})) \\
&= (\varepsilon_{A\otimes B} \otimes id)\Delta_{A\otimes B}(a \otimes b).
\end{aligned}$$

Exemplo 1.2.5 *(Coálgebra oposta) Seja C uma coálgebra. Defina $\Delta^{op} = \tau \circ \Delta$, em que $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$. Com isto $(C, \Delta^{op}, \varepsilon)$ é uma coálgebra. Note que $\Delta^{op}(x) = \tau(\Delta(x)) = \sum \tau(x_{(1)} \otimes x_{(2)}) = \sum x_{(2)} \otimes x_{(1)}$ e então é fácil verificar que*

$$(\Delta^{op} \otimes id) \circ \Delta^{op} = (id \otimes \Delta^{op}) \circ \Delta^{op}$$

e

$$(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta^{op} = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta^{op} = id$$

Quando $\Delta^{op} = \Delta$ *dizemos que* C *é uma* coálgebra cocomutativa.

Exemplo 1.2.6 *(Divided power coagebra) Seja* $C = span\{c_n; n \in \mathbb{N}\}$ *e defina*

$$\Delta(c_n) = \sum_{k=0}^{n} c_k \otimes c_{n-k}$$

$$\varepsilon(c_0) = 1 \quad e \quad \varepsilon(c_n) = 0, \forall n > 0.$$

Com isso temos que (C, Δ, ε) *é coálgebra. De fato,*

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta) \circ \Delta(c_n) &= (id \otimes \Delta)\left(\sum_{k=0}^{n} c_k \otimes c_{n-k}\right) = (id \otimes \Delta)\left(\sum_{k+l=n} c_k \otimes c_l\right) \\
&= \sum_{k+l=n} \sum_{p+q=l} c_k \otimes c_p \otimes c_q = \sum_{k+p+q=n} c_k \otimes c_p \otimes c_q \\
&= \sum_{m+q=n} \sum_{k+p=m} c_k \otimes c_p \otimes c_q = (\Delta \otimes id)\left(\sum_{m+q=n} c_m \otimes c_q\right) \\
&= (\Delta \otimes id)\left(\sum_{m=0}^{n} c_m \otimes c_{n-m}\right) = (\Delta \otimes id) \circ \Delta(c_n)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(id \otimes \varepsilon) \circ \Delta(c_n) &= (id \otimes \varepsilon)\left(\sum_{k=0}^{n} c_k \otimes c_{n-k}\right) = (id \otimes \varepsilon)\left(\sum_{k+l=n} c_k \otimes c_l\right) \\
&= \sum_{k+l=n} c_k \otimes \varepsilon(c_l) = c_n \otimes \varepsilon(c_0) = c_n = \varepsilon(c_0) \otimes c_n \\
&= \sum_{k+l=n} \varepsilon(c_k) \otimes c_l = (\varepsilon \otimes id)\left(\sum_{k+l=n} c_k \otimes c_l\right) \\
&= (\varepsilon \otimes id)\left(\sum_{k=0}^{n} c_k \otimes c_{n-k}\right) = (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta(c_n).
\end{aligned}$$

Exemplo 1.2.7 *(Coálgebra da matrizes) Considere o conjunto* $M_n(\mathbb{K})$ *das matrizes* $n \times n$ *com entradas no corpo* $\mathbb{K}$*. Seja* $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *uma base de* $M_n(\mathbb{K})$*. Defina sobre* $M_n(\mathbb{K})$ *um coproduto por* $\Delta(E_{ij}) = \sum_{p=1}^{n} E_{ip} \otimes E_{pj}$ *e uma counidade por* $\varepsilon(E_{ij}) = \delta_{ij}$*. Desta maneira,* $M_n(\mathbb{K})$ *é uma coálgebra. De fato, por um lado temos que*

$$
\begin{aligned}
(id \otimes \Delta) \circ \Delta(E_{ij}) &= (id \otimes \Delta)\left(\sum_{p=1}^{n} E_{ip} \otimes E_{pj}\right) \\
&= \sum_{p=1}^{n} E_{ip} \otimes \Delta(E_{pj}) \\
&= \sum_{p=1}^{n} E_{ip} \otimes \sum_{q=1}^{n} E_{pq} \otimes E_{qj} \\
&= \sum_{1 \leq p,q \leq n} E_{ip} \otimes E_{pq} \otimes E_{qj}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(\Delta \otimes id) \circ \Delta(E_{ij}) &= (\Delta \otimes id)\left(\sum_{p=1}^{n} E_{ip} \otimes E_{pj}\right) \\
&= \sum_{p=1}^{n} \Delta(E_{ip} \otimes E_{pj}) \\
&= \sum_{p=1}^{n} \left(\sum_{q=1}^{n} E_{iq} \otimes E_{qp}\right) \otimes E_{pj} \\
&= \sum_{1 \leq p,q \leq n} E_{iq} \otimes E_{qp} \otimes E_{pj} \\
&= \sum_{1 \leq p,q \leq n} E_{ip} \otimes E_{pq} \otimes E_{qj}.
\end{aligned}
$$

Logo, $(id \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes id) \circ \Delta$. *E também temos*

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta(E_{ij}) &= (\varepsilon \otimes id)\left(\sum_{p=1}^{n} E_{ip} \otimes E_{pj}\right) \\
&= \sum_{p=1}^{n} \varepsilon(E_{ip}) \otimes E_{pj} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \delta_{ip} \otimes E_{pj} \\
&= 1 \otimes E_{ij} = E_{ij}.
\end{aligned}
$$

Sendo o outro lado análogo.

Exemplo 1.2.8 *Considere* $\mathcal{F}(G)$ *a álgebra das funções de um grupo* G *em* $\mathbb{K}$, *conforme a contrução do exemplo 1.1.8. Primeiro, mostraremos que existe uma aplicação injetiva de* $\mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G)$ *em* $\mathcal{F}(G \times G)$ *(como espaços vetoriais). Para isso, defina*

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\psi} : \mathcal{F}(G) \times \mathcal{F}(G) &\longrightarrow \mathcal{F}(G \times G) \\
(f, g) &\longmapsto \widetilde{\psi}(f, g)
\end{aligned}
$$

em que $\widetilde{\psi}(f,g)(x,y) = f(x)g(y); x,y \in G$. *Pela definição de soma e produto por escalar em* $\mathcal{F}(G)$ *temos que* $\widetilde{\psi}$ *é bilinear. Então existe única função linear*

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathcal{F}(G)\otimes\mathcal{F}(G) & \longrightarrow & \mathcal{F}(G\times G) \\ f\otimes g & \longmapsto & \psi(f\otimes g) \end{array}$$

em que $\psi(f\otimes g)(x,y) = \widetilde{\psi}(f,g)(x,y) = f(x)g(y)$. *Agora, para cada* $x \in G$ *construímos a função*

$$\begin{array}{rcl} Ev_x : \mathcal{F}(G\times G) & \longrightarrow & \mathcal{F}(G) \\ F & \longmapsto & F(x,\cdot) \end{array}$$

em que $F(x,\cdot)(y) = F(x,y)$. *Logo, para* $\sum f_i\otimes g_i \in ker(\psi)$, *com* $\{g_i\}$ *LI, temos que* $0 = Ev_x\left(\psi\left(\sum f_i\otimes g_i\right)\right) = \sum f_i(x)g_i$. *Como* $\{g_i\}$ *é LI, segue-se que* $f_i(x) = 0, \forall i$ *e para todo* $x\in G$ *e consequentemente* $f_i \equiv 0, \forall i$. *Assim,* $\sum f_i\otimes g_i = 0$, *e portanto* ψ *é injetiva.*

Observe que no caso de G *ser finito, se* $\{P_x\}_{x\in G}$, *em que* $P_x(y) = \delta_{x,y}$, *é uma base para* $\mathcal{F}(G)$, *então* $dim\mathcal{F}(G) = |G|$, *e portanto, pelo resultado A.2.5,* $dim(\mathcal{F}(G)\otimes\mathcal{F}(G)) = |G|^2$. *Desde que* $\{P_{x,y}\}_{x\in G, y\in G}$, *onde* $P_{x,y}(v,w) = \delta_{x,v}\delta_{y,w}$, *é uma base para* $\mathcal{F}(G\times G)$, *temos também que* $dim\mathcal{F}(G\times G) = |G|^2$. *Ou seja,* ψ *é linear e injetiva, e* $dim\mathcal{F}(G\times G) = dim(\mathcal{F}(G)\otimes\mathcal{F}(G))$, *donde concluimos que* $\mathcal{F}(G)\otimes\mathcal{F}(G) \simeq \mathcal{F}(G\times G)$ *quando* G *for finito.*

Com isso, podemos dar uma estrutura de coálgebra para $\mathcal{F}(G)$ *identificando o coproduto* $\Delta(f) \in \mathcal{F}(G)\otimes\mathcal{F}(G)$ *como sendo um elemento de* $\mathcal{F}(G\times G)$. *Para isso, definimos*

$$\Delta : \mathcal{F}(G) \longrightarrow \mathcal{F}(G)\otimes\mathcal{F}(G)$$

com

$$\Delta(f)(x,y) = f(xy),\ \ \forall x,y\in G$$

e

$$\varepsilon : \mathcal{F}(G) \longrightarrow \mathbb{K}$$

por

$$\varepsilon(f) = f(e),$$

onde e *é o elemento unidade de* G. *Então* $(\mathcal{F}(G),\Delta,\varepsilon)$ *é uma coálgebra. Primeiramente verifiquemos a coassociatividade.*

$$\begin{array}{rcl} (id\otimes\Delta)\Delta(f)(x,y,z) & = & (id\otimes\Delta)(f_{(1)}\otimes f_{(2)})(x,y,z) = (f_{(1)}\otimes\Delta(f_{(2)}))(x,y,z) \\ & = & f_{(1)}(x)\cdot(f_{(2)}(yz)) = (f_{(1)}\otimes f_{(2)})(x,yz) = \Delta(f)(x,yz) \\ & = & f(x(yz)) = f((xy)z) = \Delta(f)(xy,z) = (f_{(1)}\otimes f_2)(xy,z) \\ & = & f_{(1)}(xy)\cdot f_{(2)}(z) = (\Delta(f_{(1)})\otimes f_{(2)})(x,y,z) = (\Delta\otimes id)\Delta(f)(x,y,z). \end{array}$$

Agora, note que $f(x) = f(ex) = \Delta(f)(e,x) = (f_{(1)} \otimes f_{(2)})(e,x) = f_{(1)}(e)f_{(2)}(x)$. *Segue-se, portanto o axioma da counidade*

$$(\varepsilon \otimes id)\Delta(f)(x) = (\varepsilon(f_{(1)}) \otimes f_{(2)})(x) = \varepsilon(f_{(1)})f_{(2)}(x) = f_{(1)}(e)f_{(2)}(x) = f(x).$$

Exemplo 1.2.9 *No exemplo 1.1.9, vimos que* $(\mathbb{K}G, *, \delta_e)$ *é uma álgebra. Agora, daremos uma estrutura de coálgebra ao espaço* $\mathbb{K}G$. *Então, podemos definir*

$$\begin{array}{rcl} \Delta : \mathbb{K}G & \longrightarrow & \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G \\ \delta_g & \longmapsto & \delta_g \otimes \delta_g \end{array}$$

com $\delta_g \otimes \delta_g \in \mathbb{K}(G \times G)$, *tal que* $(\delta_g \otimes \delta_g)(x,y) = \delta_g(x)\delta_g(y)$ *e estender linearmente para o espaço* $\mathbb{K}G$. *Definimos a counidade como*

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon : \mathbb{K}G & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \delta_g & \longmapsto & 1 \end{array}$$

com isto, $(\mathbb{K}G, \Delta, \varepsilon)$ *é uma coálgebra. Para* $x, y, z \in G$, *a coassociatividade*

$$\begin{array}{rcl} (\Delta \otimes id)\Delta(\delta_g)(x,y,z) & = & (\delta_g(x)\delta_g(y))\delta_g(z) \\ & = & \delta_g(x)(\delta_g(y)\delta_g(z)) \\ & = & (id \otimes \Delta)\Delta(\delta_g)(x,y,z), \end{array}$$

e a counidade

$$(\varepsilon \otimes id)\Delta(\delta_g)(x) = \delta_g(x) = (id \otimes \varepsilon)\Delta(\delta_g)(x).$$

Exemplo 1.2.10 *Considere* $U(\mathfrak{g})$ *a álgebra envolvente universal (veja a definição 1.1.24) e defina a função*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\Delta} : \mathfrak{g} & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \\ x & \longmapsto & x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x \end{array}$$

que, pelas propriedades do produto tensorial, é claramente linear. Agora, para $x, y \in \mathfrak{g}$ *temos que*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\Delta}([x,y]) & = & \widehat{\Delta}(xy - yx) = \widehat{\Delta}(xy) - \widehat{\Delta}(yx) \\ & = & xy \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes xy - yx \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes yx \\ & = & (xy - yx) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes (xy - yx) \\ & = & [x,y] \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes [x,y] \end{array}$$

e por outro lado

$$\begin{aligned}
[\widehat{\Delta}(x), \widehat{\Delta}(y)] &= \widehat{\Delta}(x)\widehat{\Delta}(y) - \widehat{\Delta}(y)\widehat{\Delta}(x) \\
&= xy \otimes \mathbf{1} + x \otimes y + y \otimes x + \mathbf{1} \otimes xy + \\
&- yx \otimes \mathbf{1} - y \otimes x - x \otimes y - \mathbf{1} \otimes yx \\
&= (xy - yx) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes (xy - yx) \\
&= [x, y] \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes [x, y].
\end{aligned}$$

Logo, $\widehat{\Delta}([x,y]) = [\widehat{\Delta}(x), \widehat{\Delta}(y)]$. *Dessa forma pela universalidade de* $U(\mathfrak{g})$ *(veja a observação 1.1.18), podemos estender* $\widehat{\Delta}$ *para* Δ *em* $U(\mathfrak{g})$*, i.é, temos a comutatividade do diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[rr, "\widehat{\Delta}"] \arrow[d, "i"'] & & U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \\
T(\mathfrak{g}) \arrow[rr, "\pi"'] & & U(\mathfrak{g}) \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Defina também

$$\begin{aligned}
\varepsilon : U(\mathfrak{g}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\
x &\longmapsto 0 \\
\mathbf{1} &\longmapsto 1
\end{aligned}$$

Com isto, $(U(\mathfrak{g}), \Delta, \varepsilon)$ *é uma coálgebra. De fato,temos a coassociatividade*

$$\begin{aligned}
(id \otimes \Delta)\Delta(x) &= (id \otimes \Delta)(x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x) = x \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \Delta(x) \\
&= x \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes x, \ \ \forall x \in U(\mathfrak{g}).
\end{aligned}$$

Analogamente

$$(\Delta \otimes id)\Delta(x) = x \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes x, \ \ \forall x \in U(\mathfrak{g}).$$

E a counidade

$$(id \otimes \varepsilon)\Delta(x) = (id \otimes \varepsilon)(x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x) = x \otimes \varepsilon(\mathbf{1}) + \mathbf{1} \otimes \varepsilon(x) = x, \ \ \forall x \in U(\mathfrak{g}).$$

Naturalmente também temos a

Definição 1.2.11 *Seja* C *uma coálgebra. Um subespaço* $D \subseteq C$ *é dito uma subcoálgebra se* $\Delta(D) \subseteq D \otimes D$.

Exemplo 1.2.12 *Seja $\{C_i\}_{i\in I}$ uma família de subcoálgebras de uma coálgebra C, então $\sum_{i\in I} C_i$ é uma subcoálgebra, uma vez que*

$$\Delta\left(\sum_{i\in I} C_i\right) = \sum_{i\in I}\Delta(C_i) \subseteq \sum_{i\in I} C_i\otimes C_i = \left(\sum_{i\in I} C_i\right)\otimes\left(\sum_{i\in I} C_i\right).$$

Definição 1.2.13 *Um subespaço I de uma coálgebra C é dito:*
(i) um coideal à esquerda (à direita) se $\Delta(I)\subseteq C\otimes I$ (respect. $\Delta(I)\subseteq I\otimes C$).
(ii) um coideal se $\Delta(I)\subseteq C\otimes I + I\otimes C$ e $\varepsilon(I)=\{0\}$.

Ao contrário do que se espera, um coideal não é necessariamente um coideal à esquerda e/ou à direita. Considerando o anel de polinômios $K[X]$ que é uma coálgebra com o coproduto

$$\Delta(X^n) = (X\otimes 1 + 1\otimes X)^n \quad \forall n\geq 1, \quad \Delta(1) = 1\otimes 1$$

e counidade

$$\varepsilon(X^n) = 0 \quad \forall n\geq 1, \quad \varepsilon(1) = 1$$

Para o subespaço $I=\langle X\rangle$ (o subespaço gerado por X), temos claramente que $\Delta(I) = I\otimes 1 + 1\otimes I$ e $\varepsilon(I)=0$, mas I não pode ser coideal à direita e nem coideal à esquerda.

Definição 1.2.14 *Sejam A e B coálgebras. Uma função linear $\varphi : A\longrightarrow B$ é um morfismo de coálgebras se*

$$\Delta_B\circ\varphi = (\varphi\otimes\varphi)\circ\Delta_A \quad e \quad \varepsilon_A = \varepsilon_B\circ\varphi$$

ou seja, os seguintes diagramas são comutativos:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Delta_A"'] & B \arrow[d, "\Delta_B"] \\ A\otimes A \arrow[r, "\varphi\otimes\varphi"'] & B\otimes B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varepsilon_A"'] & B \arrow[dl, "\varepsilon_B"] \\ \mathbb{K} & \end{tikzcd}$$

Exemplo 1.2.15 *Seja $f : C\longrightarrow D$ um morfismo de coálgebras. Neste caso, $Im(f)$ é uma subcoálgebra de D e $ker(f)$ é um coideal de C. Com efeito, como f é um morfismo de coálgebras, $\Delta_D f = (f\otimes f)\Delta_C$. Logo,*

$$\begin{aligned} \Delta_D(Im(f)) &= \Delta_D(f(C)) = (\Delta_D f)(C) \\ &= (f\otimes f)\Delta_C(C) \subseteq (f\otimes f)(C\otimes C) \\ &= f(C)\otimes f(C) = Im(f)\otimes Im(f), \end{aligned}$$

e portanto $Im(f)$ é uma subcoálgebra de D. Mostremos que $ker(f)$ é coideal de C. É claro que $\Delta_D f(ker(f)) = \Delta_D(f(ker(f))) = 0$. Como f é morfismo de coálgebras segue que $(f\otimes f)(\Delta_C(ker(f))) = 0$, o que implica em

$$\Delta_C(ker(f)) \subseteq ker(f \otimes f) = ker(f) \otimes C + C \otimes ker(f).$$

Utilizando a proposição A.2.10 na última igualdade. Ademais, como $\varepsilon_C = \varepsilon_D f$, temos que $\varepsilon_C(ker(f)) = \varepsilon_D f(ker(f)) = 0$, donde segue que $ker(f)$ é coideal de C.

Proposição 1.2.16 *Seja C uma coálgebra, I um coideal de C e $\pi : C \longrightarrow \dfrac{C}{I}$ a projeção canônica de espaços vetoriais. Então,*

(i) existe uma única estrutura de coálgebra sobre $\dfrac{C}{I}$ tal que π é uma morfismo de coálgebras.

(ii) se $f : C \longrightarrow D$ é um morfismo de coálgebras tal que $I \subseteq ker(f)$, então existe um único morfismo de coálgebras $\bar{f} : \dfrac{C}{I} \longrightarrow D$ tal que $f = \bar{f}\pi$.

Prova. (i) Como I é coideal de C,

$$(\pi \otimes \pi)\Delta(I) \subseteq (\pi \otimes \pi)(I \otimes C + C \otimes I) = \{0\}$$

Assim, pela versão mais geral do teorema do homomorfismo para espaços vetoriais aplicado à função $(\pi \otimes \pi)\Delta$, existe uma única função $\bar{\Delta} : \dfrac{C}{I} \longrightarrow \dfrac{C}{I} \otimes \dfrac{C}{I}$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[dr, "(\pi\otimes\pi)\Delta"] & \dfrac{C}{I} \arrow[d, "\bar{\Delta}"] \\
C\otimes \arrow[r, "\pi\otimes\pi"'] & \dfrac{C}{I} \otimes \dfrac{C}{I}
\end{tikzcd}$$

Esta função é definida por $\bar{\Delta}(\bar{c}) = \sum \bar{c}_{(1)} \otimes \bar{c}_{(2)}$, em que $\bar{c} = c + I = \pi(c)$.

É fácil ver que

$$(id \otimes \bar{\Delta}) \circ \bar{\Delta}(\bar{c}) = (\bar{\Delta} \otimes id) \circ \bar{\Delta}(\bar{c}) = \sum \bar{c}_{(1)} \otimes \bar{c}_{(2)} \otimes \bar{c}_{(3)},$$

portanto $\bar{\Delta}$ é coassociativa. Alé disso, como I é coideal, então $\varepsilon(I) = 0$; novamente, pelo teorema do homomorfismo para espaços vetoriais, existe uma única função linear $\bar{\varepsilon} : \dfrac{C}{I} \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que o diagrama abaixo comute:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \dfrac{C}{I} \arrow[dl, "\bar{\varepsilon}"] \\
\mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

Temos, com isso, que $\bar{\varepsilon}(\bar{c}) = \varepsilon(c)$ para qualquer $c \in C$. Logo,

$$\sum \bar{\varepsilon}(\bar{c}_{(1)})\bar{c}_{(2)} = \pi\left(\sum \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)}\right) = \pi(c) = \bar{c},$$

i.e., $\bar{\varepsilon}$ é a counidade. Portanto, $(C/I, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon})$ é uma coálgebra.

Temos ainda que os diagramas acima mostram que $\pi : C \longrightarrow \dfrac{C}{I}$ é morfismo de coálgebras. A unicidade de $\bar{\Delta}$ e $\bar{\varepsilon}$ segue das funções determinadas pelo teorema dos homomorfismos.

(ii) Mais uma vez, utilizando o teorema dos homomorfismos para espaços vetoriais, existe uma única função linear $\bar{f} : \dfrac{C}{I} \longrightarrow D$ tal que $\bar{f}\pi = f$, com $\bar{f}(\bar{c}) = f(c) \forall c \in C$. Como f é morfismo de coálgebras, temos que

$$\begin{aligned}
(\Delta_D\bar{f})(\bar{c}) &= \Delta_D(\bar{f}(\bar{c})) = \Delta_D(f(c)) = (\Delta_D f)(c) = ((f \otimes f)\Delta_C)(c) \\
&= (f \otimes f)(\Delta_C(c)) = (f \otimes f)\left(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}\right) \\
&= \sum f(c_{(1)}) \otimes f(c_{(2)}) = \sum \bar{f}(\bar{c}_{(1)}) \otimes \bar{f}(\bar{c}_{(2)}) \\
&= (\bar{f} \otimes \bar{f})\left(\sum \bar{c}_{(1)} \otimes \bar{c}_{(2)}\right) = (\bar{f} \otimes \bar{f})\bar{\Delta}(\bar{c}).
\end{aligned}$$

Alé disso,

$$\varepsilon_D(\bar{f}(\bar{c})) = \varepsilon_D(f(c)) = \varepsilon_C(c) = \bar{\varepsilon}(\bar{c}).$$

Logo, $\bar{f}$ é morfismo de coálgebras.

$\square$

Em particular temos o

Corolário 1.2.17 *Seja $f : C \longrightarrow D$ um morfismo de coálgebras. Então, $\bar{f} : \dfrac{C}{ker(f)} \longrightarrow Im(f)$ é um isomorfismo.*

$\square$

1.3 A álgebra e a coálgebra dual

Nesta seção, se V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, então V' denotará o $\mathbb{K}$-espaço vetorial dual $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$.

Atribuiremos uma estrutura de álgebra ao espaço vetorial das funções lineares de uma coálgebra C em um corpo $\mathbb{K}$. E no caso em que A é uma álgebra de dimensão finita, mostraremos que o espaço vetorial das funções lineares de A em $\mathbb{K}$ admite estrutura de coálgebra.

Proposição 1.3.1 *Sejam C uma coálgebra e A um álgebra. Então podemos dar uma estrutura de álgebra ao espaço vetorial $\mathcal{L}(C,A)$ das funções $\mathbb{K}$-lineares de C em A com o produto de convolução definido por*

$$(f*g)(c) = (\mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta)(c) \equiv \sum f(c_{(1)})g(c_{(2)}), \quad c \in C, f,g \in \mathcal{L}(C,A); \quad (1.8)$$

e com a unidade dada por $\eta \circ \varepsilon$.

Prova. Como $f*g$ é a composiçãode funções lineares claro que $f*g \in \mathcal{L}(C,A)$. Da associatividade de μ em A e da coassociatividade de Δ em C, obtemos

$$\begin{aligned}
((f*g)*h)(c) &= \sum (f*g)(c_{(1)})h(c_{(2)}) \\
&= \sum \left(\sum f(c_{(1)(1)})g(c_{(1)(2)})\right) h(c_{(2)}) \\
&= \sum f(c_{(1)(1)})g(c_{(1)(2)})h(c_{(2)}) \\
&= \sum f(c_{(1)})g(c_{(2)(1)})h(c_{(2)(2)}) \\
&= \sum f(c_{(1)}) \left(\sum g(c_{(2)(1)})h(c_{(2)(2)})\right) \\
&= \sum f(c_{(1)})(g*h)(c_{(2)}) = (f*(g*h))(c), \forall c \in C.
\end{aligned}$$

Logo o produto de convolução é associativo. E também temos

$$\begin{aligned}
(f*(\eta \circ \varepsilon))(c) &= \sum f(c_{(1)})\eta(\varepsilon(c_{(2)})) \\
&= \sum f(c_{(1)})\varepsilon(c_{(2)})\eta(1) \\
&= \sum f(c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)}))\eta(1) \\
&= f(c)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
((\eta \circ \varepsilon)*f)(c) &= \sum \eta(\varepsilon(c_{(1)}))f(c_{(2)}) \\
&= \sum \eta(1)\varepsilon(c_{(1)})f(c_{(2)}) \\
&= \sum \eta(1)f(\varepsilon(c_{(1)})c_{(2)}) \\
&= f(c), \forall c \in C.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\eta \circ \varepsilon$ é a unidade da convolução. A bilinearidade do produto de convolução vem da linearidade das funções em questão e das propriedades do produto tensorial.

$\square$

Corolário 1.3.2 *(Álgebra dual) O espaço vetorial dual C' de uma coálgebra C é uma álgebra com o produto $(fg)(c) = (f*g)(c) = \sum f(c_{(1)})g(c_{(2)}), c \in C, \quad f,g \in C'$ e unidade o funcional linear ε.*

Prova. Basta considerar na proposição 1.3.2 $A = \mathbb{K}$.

$\square$

Pelo que fizemos acima, a toda coálgebra podemos associar uma álgebra dual. Surge, naturalmente, uma questão inversa: dada uma álgebra (A, μ, η), podemos associar uma estrutura de coálgebra à A'?

Poderíamos tentar definir um coproduto da forma:

$$\Delta : A' \xrightarrow{\mu'} (A \otimes A)' \xrightarrow{\Phi^{-1}} A' \otimes A'$$

em que Φ é a mesma da proposição A.2.9.

A dificuldade ao fazer isto é que Φ não é necessariamente invertível. O resultado A.2.9 nos garante isso no caso em que A tem dimensão finita. Então, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.3.3 *Seja A uma álgebra de dimensão finita. Pela proposição A.2.9 sabemos que $A' \otimes A' \simeq (A \otimes A)'$ como espaço vetorial. Então podemos dar uma estrutura de coálgebra ao espaço vetorial A', tendo como coproduto $\Delta(f)(a \otimes b) = f(\mu(a \otimes b)) = f(ab)$ e counidade $\varepsilon(f) = f(\eta(1)) = f(1)$.*

Prova. Note que a função $\widetilde{\Delta(f)} : A \times A \longrightarrow \mathbb{K}$, definida por $\widetilde{\Delta(f)}(a, b) = f(ab)$ é bilinear. Logo pode ser estendida para o produto tensorial para $\Delta(f)$. Pela associatividade da álgebra A, temos a co-associatividade

$$\begin{aligned}
(\Delta \otimes id)\Delta(f)(a \otimes b \otimes c) &= (\Delta \otimes id)\left(\sum f_{(1)} \otimes f_{(2)}\right)(a \otimes b \otimes c) \\
&= \left(\sum \Delta(f_{(1)}) \otimes f_{(2)}\right)(a \otimes b \otimes c) \\
&= \sum f_{(1)}(ab) \otimes f_{(2)}(c) = \Delta(f)(ab \otimes c) \\
&= f((ab)c) = f(a(bc)) = \Delta(f)(a \otimes (bc)) \\
&= \sum f_{(1)}(a) \otimes f_{(2)}(bc) \\
&= \left(\sum f_{(1)} \otimes \Delta(f_{(2)})\right)(a \otimes b \otimes c) \\
&= (id \otimes \Delta)\left(\sum f_{(1)} \otimes f_{(2)}\right)(a \otimes b \otimes c) \\
&= (id \otimes \Delta)\Delta(f)(a \otimes b \otimes c),
\end{aligned}$$

e também temos a counidade

$$\begin{aligned}
(\varepsilon \otimes id)\Delta(f)(a) &= (\varepsilon \otimes id)\left(\sum f_{(1)} \otimes f_{(2)}\right)(a) \\
&= \sum \varepsilon(f_{(1)})f_{(2)}(a) = \sum f_{(1)}(1) \otimes f_{(2)}(a) \\
&= \Delta(f)(1 \otimes a) = f(1 \cdot a) \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(id\otimes\varepsilon)\Delta(f)(a) &= (id\otimes\varepsilon)\left(\sum f_{(1)}\otimes f_{(2)}\right)(a)\\ &= \sum f_{(1)}(a)\varepsilon(f_{(2)})\\ &= \sum f_{(1)}(a)\otimes f_{(2)}(1)\\ &= \Delta(f)(a\otimes 1)\\ &= f(a\cdot 1)=f(a).\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.3.4 *Seja u^i_j o funcional linear da álgebra $M_n(\mathbb{K})$(das matrizes $n\times n$ com entradas em $\mathbb{K}$) em $\mathbb{K}$ definida por $u^i_j(g)=g^i_j$ para $g=g^i_j\in M_n(\mathbb{K})$. Então $M_n(\mathbb{K})'=Lin\{u^i_j|i,j=1,2,...,n\}$ é uma coálgebra com o coproduto $\Delta(u^i_j)=\sum_{k=1}^n u^i_k\otimes u^k_j$ e counidade $\varepsilon(u^i_j)=\delta^i_j$, que nada mais é do que a estrutura de coálgebra dada pela proposição 1.3.3.*

Temos a coassociatividade:

$$(id\otimes\Delta)\Delta(u^i_j)(a\otimes b)=(id\otimes\Delta)(u^i_j(ab))=(id\otimes\Delta)\left(\sum_{k=1}^n a^i_k b^k_j\right)$$
$$=(id\otimes\Delta)\left(\sum_{k=1}^n u^i_k(a)\otimes u^k_j(b)\right)=(id\otimes\Delta)\left(\sum_{k=1}^n u^i_k\otimes u^k_j\right)(a\otimes b)$$
$$=\left(\sum_{k=1}^n\left(u^i_k\otimes\sum_{l=1}^n u^k_l\otimes u^l_j\right)\right)(a\otimes b)=\left(\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n u^i_k\otimes(u^k_l\otimes u^l_j)\right)(a\otimes b)$$
$$=\left(\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n (u^i_k\otimes u^k_l)\otimes u^l_j\right)(a\otimes b)=\left(\sum_{l=1}^n\left(\sum_{k=1}^n u^i_k\otimes u^k_l\right)\otimes u^l_j\right)(a\otimes b)$$
$$=(\Delta\otimes id)\left(\sum_{l=1}^n u^i_l\otimes u^l_j\right)(a\otimes b)=(\Delta\otimes d)\left(\sum_{l=1}^n u^i_l(a)\otimes u^l_j(b)\right)$$
$$=(\Delta\otimes id)(\sum_{l=1}^n a^i_l b^l_j)=(\Delta\otimes id)\Delta(u^i_j)(a\otimes b).$$

E também temos $(id\otimes\varepsilon)\Delta(u^i_j)=u^i_j=(\varepsilon\otimes id)\Delta(u^i_j)$, uma vez que $\varepsilon(u^i_j)=u^i_j(Id)=\delta^i_j$.

1.4 O dual finito de uma álgebra

Para esta seção, utilizamos principalmente a referência [5].

Como visto na seção anterior, dada uma coálgebra C, conseguimos dar uma estrutura de álgebra ao espaço dual C', sendo a multiplicação dada pelo produto de convolução $f*g=\mu(f\otimes g)\Delta$ e a unidade por $\eta\circ\varepsilon$. Porém, só obtivemos a dualização de uma álgebra A para uma coálgebra dual A', no caso em que A tem dimensão finita, pelo fato de que nem sempre a aplicação Δf, definida na proposição 1.3.3 como um elemento de $(A \otimes A)'$, está em $A' \otimes A'$. No entanto, podemos restringir A' para uma subálgebra menor, de forma que esta vire uma coálgebra. Antes de ver isto, considere o seguinte resultado.

Lema 1.4.1 *Sejam V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Se um conjunto de funcionais $\{f_i\}_{i=1}^n \subseteq V'$ é LI, então existem $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ tais que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, para $i, j = 1, 2, ..., n$.*

Prova. Se $\{f_i\}_{i=1}^n$ é um conjunto LI, então para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $f_i \neq 0$. Logo, para f_1, existe $u_1 \in V$ tal que $f_1(u_1) \neq 0$. E definindo $v_1 = \dfrac{u_1}{f_1(u_1)}$, teremos $f_1(v_1) = f_1\left(\dfrac{u_1}{f_1(u_1)}\right) = 1$.

Agora suponha, por hipótese de indução, que existam $\{f_i\}_{i=1}^k \subseteq V'$ e $\{u_j\}_{j=1}^k \subseteq V$ tal que $f_i(u_j) = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq k$. Seja $f_{k+1} \subseteq V'$ com $\{f_i\}_{i=1}^{k+1}$ LI, então existe $\widetilde{u_{k+1}} \in V$ de modo que $f_{k+1}(\widetilde{u_{k+1}}) \neq 0$. Defina

$$u_{k+1} = \widetilde{u_{k+1}} - \sum_{j=1}^{k} f_j(\widetilde{u_{k+1}})u_j$$

e note que pela hipótese de indução temos que

$$\begin{aligned} f_i(u_{k+1}) &= f_i(\widetilde{u_{k+1}}) - \sum_{i=1}^{k} f_j(\widetilde{u_{k+1}})f_i(u_j) \\ &= f_i(\widetilde{u_{k+1}}) - \sum_{j=1}^{k} f_j(\widetilde{u_{k+1}})\delta_{ij} = 0, \quad 1 \leq i \leq k. \end{aligned}$$

Defina também $v_{k+1} = \dfrac{u_{k+1}}{f_{k+1}(u_{k+1})}$ e $v_i = u_i - f_{k+1}(u_i)v_{k+1}$. Com isso, segue-se que

$$f_{k+1}(v_{k+1}) = f_{k+1}\left(\frac{u_{k+1}}{f_{k+1}(u_{k+1})}\right) = 1;$$

$$\begin{aligned} f_{k+1}(v_i) &= f_{k+1}(u_i) - f_{k+1}(u_i)f_{k+1}(v_{k+1}) = f_{k+1}(u_i) - f_{k+1}(u_i)f_{k+1}\left(\frac{u_{k+1}}{f_{k+1}(u_{k+1})}\right) \\ &= f_{k+1}(u_i) - f_{k+1}(u_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq k; \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_j(v_i) &= f_j(u_i) - f_{k+1}(u_i)f_j(v_{k+1}) = f_j(u_i) - f_{k+1}(u_i)f_j\left(\frac{u_{k+1}}{f_{k+1}(u_{k+1})}\right) \\ &= f_j(u_i) - f_{k+1}(u_i)\left(\frac{f_j(u_{k+1})}{f_{k+1}(u_{k+1})}\right) = f_j(u_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq k. \end{aligned}$$

E portanto, $\{f_i\}_{i=1}^{k+1} \subseteq V'$ e $\{v_i\}_{i=1}^{k+1} \subseteq V$ são tais que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$, como queríamos demonstrar.

□

Definição 1.4.2 *Dada um álgebra A e um ideal $I \trianglelefteq A$. Dizemos que I possui codimensão finita quando $dim A/I < \infty$.*

Teorema 1.4.3 *Seja A uma álgebra e $f \in A'$. Então são equivalentes:*

1) existem $f_i, g_i \in A', i = 1, ..., n$ tais que $f(ab) = \sum f_i(a)g_i(b) \forall a, b \in A$;

2) $\Delta(f) \subseteq A' \otimes A'$ (aqui consideramos $Delta(f)(a \otimes b) = f(ab)$, como na proposição 1.3.3);

3) $ker(f)$ contém um ideal à esquerda de A de codimensão finita;

4) $ker(f)$ contém um ideal à direita de A de codimensão finita;

5) $ker(f)$ contém um ideal de A de codimensão finita.

Prova. 1) $\Leftrightarrow$ 2) Sabemos que $\Delta : A' \longrightarrow (A \otimes A)'$ é tal que $\Delta(f)(a \otimes b) = f(\mu(a \otimes b)) = f(ab)$. Logo, se existem $f_i, g_i \in A'$, i=1,..., n, com $f(ab) = \sum_{i=1}^n f_i(a)g_i(b) \forall a, b \in A$, temos $\Delta(f)(a \otimes b) = f(ab) = \sum_{i=1}^n f_i(a)g_i(b) = \sum_{i=1}^n (f_i \otimes g_i)(a \otimes b)$ o que implica em $\Delta(f) \in A' \otimes A'$. Reciprocamente, se $f \in A'$ é tal que $\Delta(f) \in A' \otimes A'$ então $\Delta(f) = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i$ e $f(ab) = \Delta(f)(a \otimes b) = \sum_{i=1}^n f_i(a)g_i(b), \forall a, b \in A$.

1)$\Rightarrow$ 3) Seja $I = \bigcap_{i=1}^n ker(g_i)$, onde as funcionais g_i são as mesmas do item 1). Mostraremos, por primeiro, que $dim(A/I) < \infty$. Mas como $dim(A/ker(g_i)) = 1$ para todo $i \in \{1, ..., n\}$, segue-se, pelo lema 1.4.5, que $dim(A/I) < \infty$

Agora, note que se $b \in I = \bigcap_{i=1}^n ker(g_i)$, segue-se que

$$f(b) = f(1_A b) = \sum_{i=1}^n f_i(1_A)g_i(b) = 0 \Longrightarrow b \in ker(f).$$

Como consequência $I \subseteq ker(f)$.

Para provar que I é, de fato, um ideal à esquerda de A, sejam $b \in I$ e $a \in A$. Como $\Delta(f) \in A' \otimes A'$, podemos supor, pela observação A.2.7, que $\{f_i\}_{i=1}^n$ é LI, o que pelo Lema 1.4.1 resulta em

$$\begin{aligned} g_i(ab) &= \sum_{i=1}^n \delta_{ij} g_j(ab) = \sum_{j=1}^n f_j(a_i)g_j(ab) = f(a_i(ab)) \\ &= f((a_i a)b) = \sum_{j=1}^n f_j(a_i a)g_j(b) = 0 \Longrightarrow ab \in ker(g_i), \forall i = 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

Logo, $ab \in I$, demonstrando assim a implicação 1) $\Rightarrow$ 3). A demonstração de 1) $\Rightarrow$ 4) é análoga.

3) $\Rightarrow$ 5) Seja $I \trianglelefteq A$ o mesmo ideal encontrado em 3), e considere a função

$$
\begin{array}{rcl}
\Phi : A & \longrightarrow & \hom_{\mathbb{K}}(A/I) \\
a & \longmapsto & \Phi(a),
\end{array}
$$

em que $\Phi(a)(b+I) = ab + I$. Como I é ideal à esquerda segue-se que Φ está bem definda. Vamo mostrar que $ker(\Phi) \subseteq ker(f)$ e $A/ker(\Phi) < \infty$.

Para isto, note em primeiro lugar que, pelas propriedades da multiplicação em A, Φ é linear. Ainda vale observar que $dim(\hom_{\mathbb{K}}(A/I)) = (dim(A/I))^2 < \infty$.

Além disso para $a, b \in A$ e $c + I \in A/I$, temos que

$$
\begin{aligned}
\Phi(ab)(c+I) &= (ab)c + I = a(bc) + I = \Phi(a)(bc+I) \\
&= \Phi(a)(\Phi(b)(c+I)) = (\Phi(a) \circ \Phi(b))(c+I).
\end{aligned}
$$

Ou seja, Φ é morfismo de álgebras e, consequentemente, $J = ker(\Phi) \trianglelefteq A$. E mais, temos também que $ker(\Phi) \subseteq ker(f)$. Com efeito, $a \in ker(\Phi)$ implica $\Phi(a)(b+I) = ab + I = I$, em particular $\Phi(a)(1+I) = a1 + I = I$, i.e., $a \in I \subseteq ker(f)$. E concluimos que $ker(\Phi) \subseteq ker(f)$.

Agora, pelo fato de Φ ser morfismo de álgebras, o resultado do corolário 1.1.17 nos garante que $A/ker(\Phi) \simeq Im(\Phi) \subseteq hom_{\mathbb{K}}(A/I)$. Uma vez que $dim(Im(\Phi)) \leq dim(hom_{\mathbb{K}}(A/I)) < \infty$, segue-se que $dim(A/ker(\Phi)) < \infty$, ou seja, $ker(\Phi)$ possui codimensão finita. O que conclui a prova da implicação 3) $\Rightarrow$ 5). A implicação 4) $\Rightarrow$ 5) é análoga.

5) $\Rightarrow$ 2) Seja $J \trianglelefteq A$, com $J \subseteq ker(f)$ e $A/J < \infty$. Considere também a projeção canônica

$$
\begin{array}{rcl}
\pi : A & \longrightarrow & A/J \\
a & \longmapsto & \pi(a) = a + J
\end{array}
$$

e a aplicação dual

$$
\begin{array}{rcl}
\pi' : (A/J)' & \longrightarrow & A' \\
\varphi & \longmapsto & \pi'(\varphi)
\end{array}
$$

em que $\pi'(\varphi)(a) = \varphi(\pi(a)) = \varphi([a])$. Considere a função produto tensorial

$$
\begin{array}{rcl}
\pi' \otimes \pi' : (A/J)' \otimes (A/J)' & \longrightarrow & A' \otimes A' \\
\varphi_1 \otimes \varphi_2 & \longmapsto & (\pi' \otimes \pi')(\varphi_1 \otimes \varphi_2)
\end{array}
$$

em que $(\pi' \otimes \pi')(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(a \otimes b) = (\varphi_1 \otimes \varphi_2)(\pi(a) \otimes \pi(b)) = (\varphi_1 \otimes \varphi_2)([a] \otimes [b])$. Vamos mostrar que $\Delta(f) \in Im(\pi' \otimes \pi') \subseteq A' \otimes A'$.

Por definição $\Delta(f) \in (A \otimes A)'$. E note que $\Delta(f)|_{A \otimes J + J \otimes A} = 0$ pois, como J é ideal de A, $\mu(A \otimes J + J \otimes A) \subseteq J$, de forma que temos

$$\Delta(f)\left(\sum A\otimes J+J\otimes A\right)=\sum\Delta(f)(A\otimes J+J\otimes A)$$
$$=\sum\Delta(f)(A\otimes J)+\Delta(f)(J\otimes A)=\sum f(AJ)+f(JA)=0$$

Com isto, pelo teorema dos homomorfismos de espaços vetoriais, existe uma única transformação linear $\widehat{\Delta(f)}:\dfrac{A\otimes A}{A\otimes J+J\otimes A}\longrightarrow\mathbb{K}$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A \arrow[r, "\Delta(f)"] \arrow[d, "P"'] & \mathbb{K} \\
\dfrac{A\otimes A}{A\otimes J+J\otimes A} \arrow[ur, "\widehat{\Delta(f)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Observando que a função produto tensorial $\pi\otimes\pi: A\otimes A\longrightarrow A/J\otimes A/J$ é sobrejetora (pois π é sobrejetora) e que pelo resultado da proposição A.2.10, $ker(\pi\otimes\pi)=A\otimes ker(\pi)+ker(\pi)\otimes A=A\otimes J+J\otimes A$, segue-se, pelo teorema dos homomorfismos de espaços vetoriais, que

$$A\otimes A/ker(\pi\otimes\pi)\simeq Im(\pi\otimes\pi)=A/J\otimes A/J\Longrightarrow\frac{A\otimes A}{A\otimes J+J\otimes A}\simeq A/J\otimes A/J.$$

Dessa forma, podemos definir a função

$$\begin{array}{rcl}\widehat{\ }:(A\otimes A)' & \longrightarrow & (A/J\otimes A/J)'\\ \Delta(f) & \longmapsto & \widehat{\Delta(f)}\end{array}$$

em que $\widehat{\Delta(f)}(P(a\otimes b))=\Delta(f)(a\otimes b)$. Agora, como por hipótese J tem codimensão finita, pela proposição A.2.9, temos que $(A/J\otimes A/J)'\simeq(A/J)'\otimes(A/J)'$. Logo, podemos fazer a composição

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes A)' \arrow[r, "\widehat{\ }"] \arrow[dr, "(\pi'\otimes\pi')\circ\widehat{\ }"'] & (A/J)'\otimes(A/J)' \arrow[d, "\pi'\otimes\pi'"] \\
& A'\otimes A'
\end{tikzcd}$$

Ou seja, temos

$$(\pi'\otimes\pi')\widehat{\Delta(f)}(a\otimes b)=\widehat{\Delta(f)}(\pi(a)\otimes\pi(b))=\widehat{\Delta(f)}(P(a\otimes b))=\Delta(f)(a\otimes b)$$

e, portanto, $\Delta(f)\in Im(\pi'\otimes\pi')\subseteq A'\otimes A'$, como queríamos mostrar.

$\square$

Definição 1.4.4 *Seja A um álgebra. Definimos o* dual finito *de A como o conjunto A° das funções $f \in A'$ tal que f satisfaz quaisquer um dos itens equivalentes do teorema anterior.*

Lema 1.4.5 *Seja V um espaço vetorial e $X, Y \subseteq V$ subespaços. Se X e Y têm codimensão finita, então $X \cap Y$ também tem codimensão finita.*

Prova. Seja $\alpha : V \longrightarrow V/X \times V/Y$ o morfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetorias dado por $\alpha(v) = (v + X, v + Y)$. Então é fácil ver que $ker(\alpha) = X \cap Y$. Daí, pelo teorema dos homomorfismos, $V/ker(\alpha) \simeq Im(\alpha) \subseteq V/X \times V/Y$. Mas $dim(V/X) < \infty$ e $dim(V/Y) < \infty$. Logo, $dim(V/ker(\alpha)) = dim(V/X \cap Y) < \infty$, i.é, $X \cap Y$ tem codimensão finita.

$\square$

Proposição 1.4.6 *A° é subespaço vetorial de A'.*

Prova. Temos que mostrar que $0 \in A^\circ$; que se $f, g \in A^\circ$, então $f + g \in A^\circ$ e que, se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f \in A^\circ$, então $\lambda f \in A^\circ$. Bom, $0 \in A^\circ$, pois $ker(0) = A$ e, daí, $A/ker(0) = A/A = 0$, que possui dimensão finita. Tomando $I = ker(0)$, vemos que I possue codimensão finita e, portanto, $0 \in A^\circ$.

Sejam $f, g \in A^\circ$. Por definição, existem ideais $I_f \trianglelefteq A$ e $I_g \trianglelefteq A$, com $I_f \subseteq ker(f)$ e $I_g \subseteq ker(g)$, tais que $dim(A/I_f) < \infty$ e $dim(A/I_g) < \infty$. Logo, $I_f \cap I_g \subseteq ker(f) \cap ker(g) \subseteq ker(f + g)$, ou seja, $I_f \cap I_g \trianglelefteq A$, com $I_f \cap I_g \subseteq ker(f + g)$. Além disso, pelo lema anterior, $dim(A/I_f \cap I_g) < \infty$. Com isso, $f + g \in A^\circ$. Sejam, agora, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f \in A^\circ$. Para ver que $\lambda f \in A^\circ$, basta notar que $I_f \subseteq ker(f) \subseteq ker(\lambda f)$.

$\square$

Teorema 1.4.7 *$(A^\circ, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra com o coproduto definido por $\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i$, onde f_i e g_i são como na definição de A°, e a counidade definida por $\varepsilon(f) = f(1_A)$.*

Prova. Temos que mostrar que o coproduto está de fato bem definido e que é fechado em A°. Além de mostrar os axiomas de coálgebra.

Para mostrar que o coproduto imdepende da escolha dos f_i e g_i, suponha que podemos escrever

$$f(ab) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a)g_i(b) = \sum_{j=1}^{m} f'_j(a)g'_j(b), \forall a, b \in A,$$

então, pela observação A.2.7, existem $\{f''_k, g''_k\}_{k=1}^{p}$, com $\{g''_k\}_{k=1}^{p}$ LI, tais que $\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i - \sum_{j=1}^{m} f'_j \otimes g'_j = \sum_{k=1}^{p} f''_k \otimes g''_k$. Como $\{g''_k\}_{k=1}^{p}$ é LI, existem $b_l \in A$, $l = 1, 2, ..., p$ tais que $g''_k(b_l) = \delta_{kl}$ (Lema 1.4.1). Assim, para todo $k \in \{1, ..., p\}$ temos

$$\begin{aligned} f_k''(a) &= \sum_{l=1}^{p} f_l''(a) g_l''(b_k) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a) g_i(b_k) - \sum_{j=1}^{m} f_j'(a) g_j'(b_k) \\ &= f(ab_k) - f(ab_k) = 0 \end{aligned}$$

para $a \in A$ arbitrário. Segue que $\sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i = \sum_{j=1}^{m} f_j' \otimes g_j'$. A counidade ε está claramente bem definida.

Para mostrar que $\Delta(A^\circ) \subseteq A^\circ \otimes A^\circ$, seja $f \in A^\circ$. Então, pela observação A.2.7, podemos escrever $\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f_i \otimes g_i$ com $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ LI. Pelo lema 1.4.1, existem $a_j \in A$, $j = 1, ..., n$ tais que $f_i(a_j) = \delta_{ij}$. Segue-se que para cada $i \in \{1, ..., n\}$

$$\begin{aligned} g_i(ab) &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} g_j(ab) = \sum_{j=1}^{n} f_j(a_i) g_j(ab) = f(a_i ab) = \sum_{j=1}^{n} f_j(a_i a) g_j(b) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (f_j \circ R_{a_i})(a) g_j(b) \end{aligned}$$

em que R_{a_i} é a multiplicação por a_i à esquerda, donde $g_i \in A^\circ \forall i \in \{1, ..., n\}$. Com isso, $\Delta(f) \in A' \otimes A^\circ$. De forma análoga, escrevendo $\Delta(f) = \sum_{k=1}^{l} h_k \otimes t_k$ com $\{t_k\}_{k=1}^{l}$ LI, mostra-se que $\Delta(f) \in A^\circ \otimes A'$. Logo, $\Delta(f) \in A' \otimes A^\circ \cap A^\circ \otimes A'$. Como A° é subespaço de A' (proposição 1.4.6), temos que $\Delta(f) \in A^\circ \otimes A^\circ$.

Os axiomas de coálgebra são mostrados analogamente à proposição 1.3.3.

$\square$

Capítulo 2

Biálgebras e Álgebras de Hopf

Para este capítulo, utilizamos principalmente a referência [4]. Suponha que um espaço H possua estruturas de álgebra (H, μ, η) e de coálgebra (H, Δ, ε). A pergunta que surge é se existe alguma relação entre essas duas estruturas e a resposta está, de certa forma, no seguinte resultado.

2.1 Biálgebras

Proposição 2.1.1 *Se H é um espaço vetorial que possue uma estrutura de álgebra (H, μ, η) e uma de coálgebra (H, Δ, ε), então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\Delta : H \longrightarrow H \otimes H$ e $\varepsilon : H \longrightarrow \mathbb{K}$ são morfismos de álgebras;

(ii) $\mu : H \otimes H \longrightarrow H$ e $\eta : \mathbb{K} \longrightarrow H$ são morfismo de coálgebras.

Dizer que μ é morfismo de coálgebras é equivalente à comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & H \arrow[r, "\Delta"] & H \otimes H \\ H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[rr, "\tau_{23}"] & & H \otimes H \otimes H \otimes H \arrow[u, "\mu\otimes\mu"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\varepsilon_{H\otimes H}"'] & H \\ \mathbb{K} \arrow[ur, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

e da mesma forma dizer que η é morfismo de coálgebras é equivalente à comutatividade dos diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\Delta_{\mathbb{K}}"'] & H \arrow[d, "\Delta"] \\ \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "\eta\otimes\eta"'] & H \otimes H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "id"'] & H \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ \mathbb{K} & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

observando que $\varepsilon_{\mathbb{K}} = \eta_{\mathbb{K}} = id$. Agora, lembrando que $\Delta_{H\otimes H} = \tau_{23}(\Delta \otimes \Delta)$ e que $\mu_{H\otimes H} = (\mu \otimes \mu)\tau_{23}$, note que dizer que Δ é morfismo de álgebras é equivalente a dizer que os primeiros diagramas são comutativos (2.1); o mesmo vale para ε e os diagramas (2.2). A equivalência segue de imediato.

□

Definição 2.1.2 *Dizemos que $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra se (H, μ, η) é uma álgebra, (H, Δ, ε) é uma coálgebra e são satisfeitas as condições equivalentes da proposição 2.1.1 .*

Observação 2.1.3 *Note que uma condição necessária e suficiente para que H seja uma biálgebra é que se tenha*

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b) \ \ \forall a, b \in H, \qquad \Delta(1) = 1 \otimes 1 \tag{2.3}$$

$$\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) \ \ \forall a, b \in H, \qquad \varepsilon(1) = 1 \tag{2.4}$$

Com efeito, dada um biálgebra H, pela proposição 2.1.1, para quaisquer $a, b \in H$ segue-se que

$$\begin{aligned} \Delta(ab) &= \Delta(\mu(a \otimes b)) = \Delta\mu(a \otimes b) = (\mu_{H\otimes H}(\Delta \otimes \Delta))(a \otimes b) \\ &= \mu_{H\otimes H}(\Delta(a) \otimes \Delta(b)) = \Delta(a)\Delta(b) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon(ab) &= \varepsilon(\mu(a \otimes b)) = (\varepsilon\mu)(a \otimes b) = (\mu_{\mathbb{K}}(\varepsilon \otimes \varepsilon))(a \otimes b) \\ &= \mu_{\mathbb{K}}(\varepsilon(a) \otimes \varepsilon(b)) = \varepsilon(a)\varepsilon(b). \end{aligned}$$

Pelo mesmo motivo, também temos

$$\begin{aligned} \Delta(1) &= \Delta(\eta(1)) = (\Delta\eta)(1) = ((\eta \otimes \eta)\Delta_{\mathbb{K}})(1) \\ &= (\eta \otimes \eta)(1 \otimes 1) = \eta(1) \otimes \eta(1) = 1 \otimes 1 \end{aligned}$$

e

$$\varepsilon(1) = \varepsilon(\eta(1)) = (\varepsilon\eta)(1) = \varepsilon_{\mathbb{K}}(1) = 1$$

A recíproca é claramente satisfeita.

Naturalmente também temos as senguintes definições.

Definição 2.1.4 *Um subespaço I de uma biálgebra H é um bi-ideal se for um ideal de H no sentido de álgebras e um coideal de H no sentido de coálgebras, ou seja $\mu(I \otimes A + A \otimes I) \subseteq I$, $\Delta(I) \subseteq I \otimes H + H \otimes I$ e $\varepsilon(I) = \{0\}$.*

Definição 2.1.5 *Uma função $f : H_1 \longrightarrow H_2$ é um morfismo de biálgebras se f é morfismo de álgebras e de coálgebras. Ou seja,*

$$\begin{aligned} f\mu_{H_1} &= \mu_{H_2}(f \otimes f) \\ f\eta_{H_1} &= \eta_{H_2} \\ \Delta_{H_2} f &= (f \otimes f)\Delta_{H_1} \\ \varepsilon_{H_2} f &= \varepsilon_{H_1}. \end{aligned}$$

O quociente H/I de uma biálgebra por um bi-ideal é também uma biálgebra, basta combinar os resultados da proposições 1.1.16 e 1.2.16.

Exemplo 2.1.6 *Podemos combinar as definições relacionadas à álgebras e coálgebras. Temos, dessa forma, a biálgebra oposta $(H, \mu^{op}, \eta, \Delta, \varepsilon)$ a biálgebra cooposta $(H, \mu, \eta, \Delta^{op}, \varepsilon)$ e a biálgebra oposta/cooposta $(H, \mu^{op}, \eta, \Delta^{op}, \varepsilon)$. Verifiquemos, para ilustrar, que $(H, \mu^{op}, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra. Para todos $a, b \in H$,*

$$\begin{aligned} \Delta(ab) &= \Delta\mu^{op}(b \otimes a) = \mu^{op}_{H\otimes H}(\Delta \otimes \Delta)(b \otimes a) = \mu^{op}_{H\otimes H}(\Delta(b) \otimes \Delta(a)) \\ &= \mu_{H\otimes H}(\Delta(a) \otimes \Delta(b)) = \Delta(a)\Delta(b) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varepsilon(ab) &= \varepsilon(\mu^{op}(b \otimes a)) = \mu^{op}_{\mathbb{K}}(\varepsilon \otimes \varepsilon)(b \otimes a) \\ &= \mu^{op}_{\mathbb{K}}(\varepsilon(b) \otimes \varepsilon(a)) = \varepsilon(a)\varepsilon(b). \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.7 *Seja $A = \mathbb{K}\langle u^i_j \rangle$ a álgebra das funções coordenadas das matrizes de escalares $n \times n$ como no exemplo 1.1.15. Podemos definir uma estrutura de biálgebra em A por*

$$\Delta(u^i_j) = \sum_{k=1}^{n} u^i_k \otimes u^k_j \qquad e \qquad \varepsilon(u^i_j) = \delta_{ij}$$

que já sabemos que satisfazem os axiomas de coálgebra conforme o exemplo 1.3.4. Resta mostrar que respeitam os axiomas de biálgebras, mas note que $\Delta(u^i_j)(g_1 \otimes g_2) = \sum_{k=1}^{n} u^i_k(g_1) \otimes u^k_j(g_2) = \sum_{k=1}^{n} (g_1)_{ik}(g_2)_{kj} = (g_1g_2)_{ij} = u^i_j(g_1g_2)$, segue-se então que

$$\begin{aligned} \Delta(u^i_j u^k_l)(g_1 \otimes g_2) &= (u^i_j u^k_l)(g_1g_2) = u^i_j(g_1g_2)u^k_l(g_1g_2) = \Delta(u^i_j)(g_1 \otimes g_2)\Delta(u^k_l)(g_1 \otimes g_2) \\ &= (\Delta(u^i_j)\Delta(u^k_l))(g_1 \otimes g_2). \end{aligned}$$

e também temos

$$\varepsilon(u^i_j)\varepsilon(u^k_l) = \delta_{ij}\delta_{kl} = \varepsilon(u^i_j u^k_l).$$

Exemplo 2.1.8 *No exemplo 1.2.8 demos uma estrutura de coálgebra à álgebra $\mathcal{F}(G)$ das funções sobre um grupo finito. Agora, considerando $(\mathcal{F}(G), \mu, \eta)$ a álgebra do exemplo 1.1.8 e $(\mathcal{F}(G), \Delta, \varepsilon)$ a coálgebra do exemplo 1.2.8, verifiquemos que $(\mathcal{F}(G), \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra. De fato,*

$$\begin{aligned}\Delta(fg)(x,y) &= (fg)(xy) = f(xy)\cdot g(xy)\\ &= \Delta(f)(x,y)\Delta(g)(x,y) = (\Delta(f)\Delta(g))(x,y)\end{aligned}$$

e

$$\varepsilon(fg) = (fg)(e) = f(e)g(e) = \varepsilon(f)\varepsilon(g).$$

Exemplo 2.1.9 *Nos exemplos 1.1.9 e 1.2.9, vimos que $\mathbb{K}G$ admite estrutura de álgebra e de coálgebra, respectivamente. Relembrando que o produto é definido por $(a*b)(g) = \sum_{hl=g} a(h)b(l)$ com unidade δ_e, o coproduto é dado por $\Delta(\delta_g) = \delta_g \otimes \delta_g$ e a counidade é definida por $\varepsilon(\delta_g) = 1$. Agora, veremos que, com estas operações, $(\mathbb{K}G, *, \delta_e, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra. Mas observe que para $x \in G$*

$$(\delta_g * \delta_h)(x) = \sum_{yz=x} \delta_g(y)\delta_h(z) = \delta_{gh}(x),$$

logo,

$$\begin{aligned}\Delta(\delta_g * \delta_h) &= \Delta(\delta_{gh}) = \delta_{gh} \otimes \delta_{gh} = (\delta_g * \delta_g) \otimes (\delta_g * \delta_h)\\ &= (\delta_g \otimes \delta_g) * (\delta_h \otimes \delta_h)\\ &= \Delta(\delta_g) * \Delta(\delta_h),\end{aligned}$$

$$\varepsilon(\delta_g * \delta_h) = \varepsilon(\delta_{gh}) = 1 = 1 \cdot 1 = \varepsilon(\delta_g) \cdot \varepsilon(\delta_h)$$

e por definição $\Delta(\delta_e) = \delta_e \otimes \delta_e$, e $\varepsilon(\delta_e) = 1$, donde segue-se que Δ e ε são morfismos de álgebras. Portanto, $(\mathbb{K}G, *, \delta_e, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra.

Exemplo 2.1.10 *No exemplo 1.2.10 demos uma estrutura de coálgebra à álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$. Segue-se agora que $(U(\mathfrak{g}), \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra, onde $(U(\mathfrak{g}), \mu, \eta)$ é a álgebra da definição 1.1.24 e $(U(\mathfrak{g}), \Delta, \varepsilon)$ é a coálgebra do exemplo 1.2.10 . Com efeito, conforme mostramos no exemplo 1.2.10,Δ é uma extensão de $\widehat{\Delta}$, logo temos que Δ é morfismo de álgebras, i. é, $\Delta([x,y]) = [\Delta(x), \Delta(y)]$ e $\Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}$. E para quaisquer $x, y \in U(\mathfrak{g})$ também temos*

$$\varepsilon([x,y]) = \varepsilon(xy) - \varepsilon(yx) = 0 = \varepsilon(x)\varepsilon(y) - \varepsilon(y)\varepsilon(x) = [\varepsilon(x), \varepsilon(y)]$$

e $\varepsilon(\mathbf{1}) = 1$. Donde segue-se que $(U(\mathfrak{g}), \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra.

Exemplo 2.1.11 *Seja H um biálgebra. Em particular, pelo teorema 1.4.7, sabemos que $(H^\circ, \Delta, \varepsilon)$ é uma coálgebra com $\Delta(f) = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i$ e $\varepsilon(f) = f(1)$. Então, podemos dar um estrutura de biálgebra à H°. A multiplicação vai ser o produto de convolução com identidade dada por ε_H, o coproduto e counidade como acima.*

Já sabemos, pela proposição 1.4.6, que H° é subespaço de H'. Mostremos que o produto de convolução é fechado em H°. Dadas $f, g \in H^\circ$, considere as funções em H', $\{f_i, g_i\}_{i=1}^n$ e $\{f'_j, g'_j\}_{j=1}^m$ dadas na definição de H°. Então,

$$\begin{aligned}
(f * g)(ab) &= \sum f((ab)_{(1)})g((ab)_{(2)}) = \sum f(a_{(1)}b_{(1)})g(a_{(2)}b_{(2)}) \\
&= \sum \left(\sum_{i=1}^n f_i(a_{(1)})g_i(b_{(1)}) \right) \left(\sum_{j=1}^m f'_j(a_{(2)})g'_j(b_{(2)}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\sum f_i(a_{(1)})f'_j(a_{(2)})g_i(b_{(1)})g'_j(b_{(2)}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (f_i * f'_j)(a)(g_j * g'_j)(b),
\end{aligned}$$

donde $f * g \in H^\circ$. É claro que $\varepsilon_H \in H^\circ$ pois $\varepsilon_H(ab) = \varepsilon_H(a)\varepsilon_H(b)$. Segue-se que,

$$\begin{aligned}
(f * \varepsilon_H)(ab) &= \sum f(a_{(1)}b_{(1)})\varepsilon_H(a_{(2)}b_{(2)}) \\
&= \sum \sum_{i=1}^n f_i(a_{(1)})g_i(b_{(1)})\varepsilon_H(a_{(2)})\varepsilon_H(b_{(2)}) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum f_i(a_{(1)}\varepsilon_H(a_{(2)}))g_i(b_{(1)}\varepsilon_H(b_{(2)})) \\
&= \sum_{i=1}^n f_i(a)g_i(b) = f(ab),
\end{aligned}$$

ou seja, ε_H é a identidade do produto de convolução.

Para mostrar que Δ é morfismo de álgebra, basta notar que como a convolução é fechada em H°, temos

$$\begin{aligned}
\Delta(f * g)(a \otimes b) &= (f * g)(ab) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (f_i * f'_j)(a)(g_i * g'_j)(b) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m ((f_i * f'_j) \otimes (g_i * g'_j))(a \otimes b) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m ((f_i \otimes g_i) * (f'_j \otimes g'_j))(a \otimes b) \\
&= (\Delta(f) * \Delta(g))(a \otimes b).
\end{aligned}$$

Na penúltima igualdade utilizamos o produto em $H^\circ \otimes H^\circ$ dado pelo exemplo 1.1.6. E também temos,

$$\Delta(\varepsilon_H)(a \otimes b) = \varepsilon_H(ab) = \varepsilon_H(a)\varepsilon_H(b) = (\varepsilon_H \otimes \varepsilon_H)(a \otimes b),$$

$$\varepsilon(f * g) = (f * g)(1) = f(1)g(1) = \varepsilon(f)\varepsilon(g)$$

e

$$\varepsilon(\varepsilon_H) = \varepsilon_H(1) = 1.$$

Logo, Δ e ε são morfismos de álgebras. Portanto, com as operações acima, o dual finito H° de uma biálgebra H é um biálgebra.

2.2 Álgebras de Hopf

Definição 2.2.1 *Uma biálgebra $(H, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ é dita ser uma álgebra de Hopf se existe uma função linear $S : H \longrightarrow H$, chamada de antípoda de H, tal que*

$$\mu \circ (id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = \mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta \tag{2.5}$$

Em outras palavras, a igualdade (2.5) é equivalente à comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[d, "id\otimes S"'] & H \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\eta\circ\varepsilon"] & H \otimes H \arrow[d, "S\otimes id"] \\
H \otimes H \arrow[r, "\mu"] & H & H \otimes H \arrow[l, "\mu"']
\end{tikzcd}$$

Na notação de Sweedler a relação (2.5) fica como

$$\sum h_{(1)}S(h_{(2)}) = \varepsilon(h)1 = \sum S(h_{(1)})h_{(2)}, \tag{2.6}$$

com $\Delta(h) = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$. A equação (2.5), também chamada de axioma da antípoda, pode ser interpretada como o produto de convolução (1.8) da álgebra $\mathcal{L}(H, H)$. Comparando as fórmulas (2.5) e (1.8) percebemos que S é o elemento inverso da função id em relação ao produto de convolução da álgebra $\mathcal{L}(H, H)$, i.é, $id * S = S * id = \eta\varepsilon$. Note, com isso, que a antípoda S é unicamente determinada por ser um inverso.

O próximo resultado determina uma propriedade importante da antípoda.

Proposição 2.2.2 *Seja H uma álgebra de Hopf e S sua antípoda. Então S é anti-homomorfismo de álgebras e anti-homomorfismo de coálgebras, ou seja, $S : H \longrightarrow H^{op}$ é um homomorfismo de álgebras e $S : H \longrightarrow H^{cop}$é um homomorfismo de coálgebras. Em outras palavras, temos que*

$$S(gh) = S(h)S(g), \quad g, h \in H \quad e \quad S(1) = 1 \tag{2.7}$$

$$\Delta \circ S = \tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta \quad e \quad \varepsilon \circ S = \varepsilon. \tag{2.8}$$

Prova. Aplicando o axioma da ántípoda para identidade temos

$$S(1) = S(1)1 = \mu(S \otimes id)\Delta(1) = \eta(\varepsilon(1)) = \varepsilon(1)1 = 1.$$

Agora, mostremos que $S(gh) = S(h)S(g)$ utilizando a notação de Sweedler (Veja o apêndice C). Assim, usando o axioma da antípoda e o fato de Δ e ε serem morfismos de álgebras, temos que

$$\begin{aligned}
S(h)S(g) &= \sum S(h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)}))S(g_{(1)}\varepsilon(g_{(2)})) \\
&= \sum S(h_{(1)})S(g_{(1)})\varepsilon(g_2)\varepsilon(h_{(2)}) \\
&= \sum S(h_{(1)})S(g_{(1)})\varepsilon(g_{(2)}h_{(2)}) \\
&= \sum S(h_{(1)})S(g_{(1)})\eta(\varepsilon(g_{(2)}h_{(2)})) \\
&= \sum S(h_{(1)})S(g_{(1)})(g_{(2)}h_{(2)})_{(1)}S((g_{(2)}h_{(2)})_{(2)}) \\
&= \sum S(h_{(1)})S(g_{(1)})g_{(2)}h_{(2)}S(g_{(3)}h_{(3)}) \\
&= \sum S(h_{(1)})\eta(\varepsilon(g_{(1)}))h_{(2)}S(g_{(2)}h_{(3)}) \\
&= \sum S(h_{(1)})h_{(2)}\varepsilon(g_{(1)})S(g_{(2)}h_{(3)}) \\
&= \sum \eta(\varepsilon(h_{(1)}))\varepsilon(g_{(1)})S(g_{(2)}h_{(2)}) \\
&= \sum \varepsilon(h_{(1)})\varepsilon(g_{(1)})S(g_{(2)}h_{(2)}) \\
&= S\left(\left(\sum \varepsilon(g_{(1)})g_{(2)}\right)\left(\sum \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}\right)\right) = S(gh),
\end{aligned}$$

provando a igualdade (2.7). Para mostrar a segunda relação usamos o fato de $\mu(S \otimes id)\Delta(1) = \varepsilon(1)1$ combinado com o fato que $\Delta(1) = 1 \otimes 1$ e $\varepsilon(1) = 1$. Calculando, temos

$$
\begin{aligned}
\tau(S\otimes S)\Delta(h) &= \sum S(h_{(2)})\otimes S(h_{(1)}) \\
&= \sum S(h_{(2)}\varepsilon(h_{(3)}))\otimes S(h_{(1)}) \\
&= \sum (S(h_{(2)})\otimes S(h_{(1)}))(\varepsilon(h_{(3)})1\otimes 1) \\
&= \sum (S(h_{(2)})\otimes S(h_{(1)}))(\Delta(h_{(3)}S(h_{(4)}))) \\
&= \sum (S(h_{(2)})\otimes S(h_{(1)}))((h_{(3)}S(h_{(4)}))_{(1)}\otimes (h_{(3)}S(h_{(4)}))_{(2)}) \\
&= \sum (S(h_2)\otimes S(h_{(1)}))(h_{(3)(1)}\otimes h_{(3)(2)})(S(h_{(4)})_{(1)}\otimes S(h_{(4)})_{(2)}) \\
&= \sum (S(h_{(2)})\otimes S(h_{(1)}))(h_{(3)}\otimes h_{(4)})\Delta(S(h_{(5)})) \\
&= \sum (S(h_{(2)})h_{(3)}\otimes S(h_{(1)})h_{(4)})(\Delta(S(h_{(5)}))) \\
&= \sum (\varepsilon(h_{(2)})1\otimes S(h_{(1)})h_{(3)})(\Delta(S(h_{(4)}))) \\
&= \sum (1\otimes S(h_{(1)})h_{(2)})(\Delta(S(h_{(3)}))) \\
&= \sum (1\otimes \varepsilon(h_{(1)})1)(\Delta(S(h_{(2)}))) \\
&= \sum \Delta(\varepsilon(h_{(1)})S(h_{(2)})) \\
&= \Delta\left(S\left(\sum \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}\right)\right) = \Delta(S(h)),
\end{aligned}
$$

o que prova a primeira relação de (2.8). Além do mais

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(S(h)) &= \varepsilon\left(S\left(\sum \varepsilon(h_{(1)})h_{(2)}\right)\right) = \sum \varepsilon(S(\varepsilon(h_{(1)})h_{(2)})) \\
&= \sum \varepsilon(h_{(1)})\varepsilon(S(h_{(2)})) = \sum \varepsilon(h_{(1)}S(h_{(2)})) \\
&= \varepsilon(\varepsilon(h)1) = \varepsilon(h)\varepsilon(1) = \varepsilon(h).
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposição 2.2.3 *Para H uma álgebra de Hopf as seguintes condições são equivalentes:*

(i) S é inversível como transformação linear;

(ii) a biálgebra H^{op} é uma álgebra de Hopf;

(iii) a biálgebra H^{cop} é uma álgebra de Hopf.

Prova. $(i) \Rightarrow (ii)$ Como S é inversível, S^{-1} também é anti-homomorfismo de álgebras (proposição 2.2.2). Então, pela relação (2.7) segue-se que

$$
\begin{aligned}
\mu^{op}(id\otimes S^{-1})\Delta(a) &= \sum S^{-1}(a_{(2)})a_{(1)} = \sum S^{-1}(a_{(2)})S^{-1}(S(a_{(1)})) \\
&= S^{-1}\left(\sum S(a_{(1)})a_{(2)}\right) \\
&= S^{-1}(\varepsilon(a)1) = \varepsilon(a)1.
\end{aligned}
$$

Analogamente mostra-se que $\mu^{op}(S^{-1} \otimes id)\Delta(a) = \varepsilon(a)1$ para $a \in H$. Dessa forma, vemos que S^{-1} é a antípoda da biálgebra H^{op}.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja S^{op} a antípoda da álgebra de Hopf H^{op}. Então

$$\begin{aligned} S^{op}(S(a)) &= S^{op}\left(S\left(\sum \varepsilon(a_{(2)})a_{(1)}\right)\right) = \sum \varepsilon(a_{(2)})S^{op}(S(a_{(1)})) \\ &= \sum (a_{(3)}S^{op}(a_{(2)}))S^{op}(S(a_{(1)})) = \sum a_{(3)}S^{op}(S(a_{(1)})a_{(2)}) \\ &= \sum a_{(2)}S^{op}(\varepsilon(a_{(1)})1) = aS^{op}(1) = a, \end{aligned}$$

sendo análogo para $S(S^{op}(a)) = a$, $a \in H$. Consequentemente, S^{op} é a função inversa de S.

$(i) \Rightarrow (iii)$ De modo similar, como S é inversível, temos $\mu(id \otimes S^{-1})\Delta^{op}(a) = \mu(S^{-1} \otimes id)\Delta^{op}(a) = \varepsilon(a)1$, $\forall a \in H$. Ou seja, S^{-1} é uma antípoda para H^{cop} e portanto H^{cop} é uma álgebra de Hopf.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Reciprocamente, se H^{cop} é uma álgebra de Hopf e S^{cop} uma antípoda para H^{cop}, procedendo como no caso anterior, mostramos que $S^{cop} = S^{-1}$.

$\square$

Corolário 2.2.4 *Se uma álgebra de Hopf H for comutativa ou cocomutativa, então $S^2 = id$.*

Prova. Se H for comutativa, sabemos que $H = H^{op}$, i. e., $S = S^{op}$, o que pela proposição 2.2.3 nos dá $S^2(a) = S(S(a)) = S(S^{op}(a)) = S(S^{-1}(a)) = a$. Da mesma forma, se H for cocomutativa, temos $H = H^{cop}$, o que implica em $S^{-1} = S^{cop}$, donde segue o resultado.

$\square$

2.3 Exemplos de álgebras de Hopf

Exemplo 2.3.1 *Conforme o exemplo 2.1.8 temos que $\mathcal{F}(G)$ é uma biálgebra. Defina um antípoda*

$$\begin{aligned} S : \mathcal{F}(G) &\longrightarrow \mathcal{F}(G) \\ f &\longmapsto s(f), \end{aligned}$$

em que $S(f)(x) = f(x^{-1})$. Então, dada a biálgebra $(\mathcal{F}(G), \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ do exemplo 2.1.8, segue-se que $(\mathcal{F}(G), \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ é uma álgebra de Hopf. Para verificar isto, basta mostrar que S satisfaz o axioma da antípoda, i.é,

$$\begin{aligned} \mu(id \otimes S)\Delta(f)(x) &= \sum \mu(f_{(1)} \otimes S(f_{(2)}))(x) = \sum f_{(1)}(x) \cdot S(f_{(2)})(x) \\ &= \sum f_{(1)}(x) \cdot f_{(2)}(x^{-1}) = \sum (f_{(1)} \otimes f_{(2)})(x, x^{-1}) \\ &= \Delta(f)(x, x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(e) = \varepsilon(f)(x) = (\eta \circ \varepsilon)(f(x)). \end{aligned}$$

Sendo análogo para $\mu(id \otimes S)\Delta = \eta \circ \varepsilon$.

Exemplo 2.3.2 *Seja $(\mathbb{K}G, *, \delta_e, \Delta, \varepsilon)$ a biálgebra do exemplo 2.1.9. Vamos mostrar que a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} S : \mathbb{K}G & \longrightarrow & \mathbb{K}G \\ \delta_g & \longmapsto & S(\delta_g) = \delta_{g^{-1}} \end{array}$$

é uma antípoda para a biálgebra $\mathbb{K}G$. De fato, tomando μ como o produto de convolução, $\mu(S \otimes id)\Delta(\delta_g) = S(\delta_g) * \delta_g = \delta_{g^{-1}} * \delta_g = \delta_{g^{-1}g} = \delta_e = \varepsilon(\delta_g)$, sendo o outro lado análogo. Portanto, $\mathbb{K}G$ é uma álgebra de Hopf.

Exemplo 2.3.3 *Pelo exemplo 2.1.10 temos que $(U(\mathfrak{g}), \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra, em que $(U(\mathfrak{g}), \mu, \eta)$ é a álgebra envolvente universal da definição 1.1.24 e $(U(\mathfrak{g}), \Delta, \varepsilon)$ é a coálgebra do exemplo 1.2.10. Defina em $U(\mathfrak{g})$ a antípoda*

$$\begin{array}{rcl} S : U(\mathfrak{g}) & \longrightarrow & U(\mathfrak{g}) \\ x & \longmapsto & -x \end{array}$$

Com isto segue-se que $(U(\mathfrak{g}), \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ é uma álgebra de Hopf. Para ver isto, basta mostrar que S satisfaz o axioma da antípoda. De fato,

$$\begin{aligned} \mu(S \otimes id)\Delta(x) &= \mu(S \otimes id)(x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x) = \mu(-x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes x) \\ &= -x \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1} \cdot x = 0 = \varepsilon(x) \cdot \mathbf{1} \end{aligned}$$

e da mesma forma temos $\mu(id \otimes S)\Delta = \eta \circ \varepsilon$.

Exemplo 2.3.4 *(Álgebra de Hopf dual) No exemplo 2.1.11 vimos que dual finito H° de uma biálgebra H admite uma estrutura de biálgebra. A multiplicação é dada pelo produto de convolução com identidade dada por ε_H, o coproduto é definido por $\Delta(f) = \sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i$ e a counidade é $\varepsilon(f) = f(1)$. Vamos mostrar que esta biálgebra é uma álgebra de Hopf com a antípoda definida por $S(f)(a) = f(S(a))$.*

Para a antípoda, dada $f \in H^\circ$ e $\{f_i, g_i\}_{i=1}^n$ as funções correspondentes, então

$$\begin{aligned} S(f)(ab) &= f(S(ab)) = f(S(b)S(a)) = \sum_{i=1}^n f_i(S(b))g_i(S(a)) \\ &= \sum_{i=1}^n (g_i \circ S)(a)(f_i \circ S)(b). \end{aligned}$$

Logo, S é fechada em H°. Por fim, mostremos um dos lados do axioma da antípoda sendo o outro análogo. Dada $f \in H^\circ$, $\{f_i, g_i\}_{i=1}^n$ suas funções correspondentes me lembrando que μ é o produto de convolução, segue que

$$\begin{aligned} \mu \quad & (S \otimes id)\Delta(f)(a) = \mu(S \otimes id)\left(\sum_{i=1}^n f_i \otimes g_i\right)(a) = \mu\left(\sum_{i=1}^n S(f_i) \otimes g_i\right)(a) \\ = \quad & \sum_{i=1}^n S(f_i) * g_i(a) = \sum_{i=1}^n \sum S(f_i)(a_{(1)})g_i(a_{(2)}) = \sum_{i=1}^n f_i(S(a_{(1)}))g_i(a_{(2)}) \\ = \quad & \sum f(S(a_{(1)})a_{(2)}) = f(\varepsilon_H(a)1) = f(1)\varepsilon_H(a) = \varepsilon(f)1_{H^\circ}. \end{aligned}$$

Apêndice A

Produto Tensorial

A.1 Definição e construção

Neste apêndice, daremos uma definição de produto tensorial entre espaços vetoriais através de uma propriedade universal e faremos a contrução do produto tensorial. Veremos alguns resultados elementares a respeito do produto tensorial, que serão de uso frequente na teoria desenvolvida ao longo de todo o texto. Todos os espaços vetoriais são sobre um corpo $\mathbb{K}$ fixado. Utilizamos principalmente as referências [1] e [2].

Definição A.1.1 *Um produto tensorial entre dois espaços vetoriais V e W é um par ordenado (T,φ), em que T é um espaço vetorial e $\varphi : V \times W \longrightarrow T$ uma aplicação bilinear tal que para todo espaço vetorial U e toda aplicação bilinear $f : V \times W \longrightarrow U$ existe uma única aplicação linear $\bar{f} : T \longrightarrow U$ de modo que $f = \bar{f} \circ \varphi$.*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Proposição A.1.2 *O produto tensorial entre dois espaços vetoriais é único a menos de isomorfismo.*

Prova. Sejam (T_1,φ_1) e (T_2,φ_2) ambos produtos tensoriais entre espaços vetoriais V e W. Então existem aplicações bilineares

$$\varphi_1 : V \times W \longrightarrow T_1 \quad e \quad \varphi_2 : V \times W \longrightarrow T_2$$

tal que para quaisquer espaços vetoriais U_1 e U_2, e para quaisquer aplicações bilineares

$$f_1 : V \times W \longrightarrow U_1 \quad e \quad f_2 : V \times W \longrightarrow U_2$$

existe uma única aplicação linear $\bar{f}_1 : T_1 \longrightarrow U_1$ e uma outra única aplicação linear $\bar{f}_2 : T_2 \longrightarrow U_2$ de modo que

$$f_1 = \bar{f}_1 \circ \varphi_1 \quad e \quad f_2 = \bar{f}_2 \circ \varphi_2.$$

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & T_1 \arrow[d, "\bar{f}_1"] \\ & U_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[dr, "f_2"'] & T_2 \arrow[d, "\bar{f}_2"] \\ & U_2 \end{tikzcd}$$

Tomando $U_1 = T_2$, $U_2 = T_1$, $f_1 = \varphi_2$ e $f_2 = \varphi_1$ segue que

$$\varphi_2 = \bar{f}_1 \circ \varphi_1 \quad e \quad \varphi_1 = \bar{f}_2 \circ \varphi_2.$$

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & T_1 \arrow[d, "\bar{f}_1"] \\ & T_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & T_2 \arrow[d, "\bar{f}_2"] \\ & T_1 \end{tikzcd}$$

Logo,

$$\varphi_1 = \bar{f}_2 \circ (\bar{f}_1 \circ \varphi_1) \quad e \quad \varphi_2 = \bar{f}_1 \circ (\bar{f}_2 \circ \varphi_2),$$

o que implica em

$$\bar{f}_1 \circ \bar{f}_2 = Id_{T_2} \quad e \quad \bar{f}_2 \circ \bar{f}_1 = Id_{T_1}.$$

Portanto $T_1 \simeq T_2$.

$\square$

Vamos agora construir um produto tensorial.

Sejam V e W espaços vetorias. Tome o espaço gerado por $V \times W$

$$\langle V \times W \rangle = \left\{ \sum_i \lambda_i (v_i, w_i); \quad v_i \in V, \quad w_i \in W, \quad \lambda_i = 0 \quad a \quad menos \quad de \quad uma \quad quantidade \quad finita \right\}$$

Sejam

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \{(v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w); v_1,v_2\in V, w\in W\}\,;\\
D_2 &= \{(v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2); w_1,w_2\in W, v\in V\}\,;\\
D_3 &= \{\lambda(v,w)-(\lambda v,w); v\in V, w\in W, \lambda\in\mathbb{K}\}\,;\\
D_4 &= \{\lambda(v,w)-(v,\lambda w); v\in V, w\in W, \lambda\in\mathbb{K}\}\,.
\end{aligned}
$$

Defina $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ e denote o quociente $V \otimes W = \langle V \times W\rangle / \langle D\rangle$. Denote também por $\tilde{\varphi}$ a projeção canônica de $\langle V \times W\rangle$ em $V \otimes W$ e por $\imath$ a inclusão natural de $V \times W$ em $\langle V \times W\rangle$. Então, podemos definir $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \imath : V \times W \longrightarrow V \otimes W$ e observe que $\varphi(V \times W)$ gera $V \otimes W$, pois se $x = \left(\sum_{i=0}^n \lambda_i (v_i, w_i)\right) + \langle D\rangle$ então $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i \left((v_i, w_i) + \langle D\rangle\right) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \varphi(v_i, w_i)$. A classe $[(v,w)] \in \langle V \times W\rangle / \langle D\rangle$ será denotada por $v \otimes w$.

Proposição A.1.3 *Nas condições acima o par $(V \otimes W, \varphi)$ é um produto tensorial entre V e W.*

Prova. Primeiramente, temos que mostrar que φ é bilinear. Mas como $\tilde{\varphi}$ leva os elementos de $\langle D\rangle$ em 0, em particular para os elementos de D temos que $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \imath$ é tal que

$$
\begin{aligned}
(v_1+v_2)\otimes w &= v_1\otimes w + v_2 \otimes w, && \text{(A.1)}\\
v\otimes(w_1+w_2) &= v\otimes w_1 + v\otimes w_2, && \text{(A.2)}\\
\lambda(v\otimes w) &= (\lambda v)\otimes w, && \text{(A.3)}\\
\lambda(v\otimes w) &= v\otimes(\lambda w). && \text{(A.4)}
\end{aligned}
$$

Logo φ é bilinear. Agora sejam U um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $f : V \times W \longrightarrow U$ uma função bilinear. Defina $\bar{f} : V \otimes W \longrightarrow U$, com

$$
\bar{f}\left(\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i\right) = \sum_{i=1}^n f(v_i, w_i).
$$

Note que $\bar{f}$ está bem definida. Se $\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i = 0$, então $\sum_{i=1}^n (v_i, w_i) \in \langle D\rangle$. Logo, $\bar{f}\left(\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i\right) = \sum_{i=1}^n f(v_i, w_i) = 0$, pois f se anula nas combinações lineares referentes a D.

Se supormos a existência de outra função linear $g : V \otimes W \longrightarrow U$ tal que $g \circ \varphi = f$ teremos que

$$
\begin{aligned}
g\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_1\right) &= \sum_{i=1}^{n} g(v_i \otimes w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (g \circ \varphi)(v_i, w_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(v_i, w_i) \\
&= \bar{f}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i\right) \Longrightarrow g = \bar{f},
\end{aligned}
$$

e, portanto, $(V \otimes W, \varphi)$ é um produto tensorial entre os espaços vetoriais V e W.

$\square$

Mostramos assim a existência de um produto tensorial e, como este é único a menos de isomorfismo, sempre que mencionarmos produto tensorial estaremos nos referindo a este que acabamos de construir. Além disso, pela igualdade A.3 dados $v \in V$ e $w \in W$ podemos escrever

$$
\begin{aligned}
v \otimes w &= [(v, w)] = \left[\sum_{i}^{n} \lambda_i (v_i, w_i), v_i \in V, w_i \in W\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left[(v_i, w_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i \otimes w_i) = \sum_{i=1}^{n} (v'_i \otimes w_i)
\end{aligned}
$$

para $\lambda_i v_i = v'_i$. Esta última maneira de escrever mostra que não precisamos de coeficientes para escrevermos um elemento de $V \otimes W$.

A.2 Alguns resultados

A partir de agora, mostraremos alguns resultados com o produto tensorial que são utilizados ao longo de todo o texto.

Na proposição seguinte falaremos da função produto tensorial.

Proposição A.2.1 *Sejam V, V', W, W' espaços vetoriais, $f : V \longrightarrow W$ e $f' : V' \longrightarrow W'$ homomorfismos de espaços vetoriais. Então existe um único homomorfismo de espaços veotriais $f \otimes f' : V \otimes V' \longrightarrow W \otimes W'$, que nos geradores é dado por $(f \otimes f')(v \otimes v') = f(v) \otimes f'(v')$.*

Prova. Defina a função

$$
\begin{aligned}
g : V \times V' &\longrightarrow W \otimes W' \\
(v, w) &\longmapsto f(v) \otimes f'(v').
\end{aligned}
$$

Como f e f' são homomorfismos, segue que

$$\begin{aligned} g(v, v_1' + \lambda v_2') &= f(v) \otimes f'(v_1' + \lambda v_2') \\ &= f(v) \otimes (f'(v_1') + \lambda f'(v_2')) \\ &= f(v) \otimes f'(v_1') + \lambda(f(v) \otimes f'(v_2')) \\ &= g(v, v_1') + \lambda g(v, v_2'), \forall v \in V, \forall v_1', v_2' \in V', \forall \lambda \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

E analogamente $g(\lambda v_1 + v_2, v') = \lambda g(v_1, v') + g(v_2, v')$, assim g é bilinear. Consequentemente existe uma única função linear $\bar{g} : V \otimes V' \longrightarrow W \otimes W'$ tal que $\bar{g}(v \otimes v') = g(v, v') = f(v) \otimes f'(v')$.

$$\begin{tikzcd} V \times V' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "g"'] & V \otimes V' \arrow[d, "\bar{g}"] \\ & W \otimes W' \end{tikzcd}$$

Defina $(f \otimes f') = \bar{g}$. Como f e f' são homomorfismos de espaços vetoriais, é fácil verificar que $f \otimes f'$ é homomorfismo de espaços vetoriais.

$\square$

Proposição A.2.2 *Sejam V um espaço vetorial e $\mathbb{K}$ um corpo. então $\mathbb{K} \otimes V \simeq V \simeq V \otimes \mathbb{K}$.*

Prova. Mostremos que V é o produto tensorial entre $\mathbb{K}$ e V. Para isso, seja

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K} \times V &\longrightarrow V \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda v \quad , \end{aligned}$$

que é claramente bilinear. Agora, para todo espaço vetorial U e para toda função bilinear $f : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$ defina $\bar{f} : V \longrightarrow U$, com $\bar{f}(v) = f(1, v)$. Desse modo $\bar{f}$ é linear pois f é bilinear, e vemos que

$$(\bar{f} \circ \varphi)(\lambda, v) = \bar{f}(\varphi(\lambda, v)) = \bar{f}(\lambda v) = f(1, \lambda v) = f(\lambda, v), \quad \forall (\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V.$$

Logo $\bar{f} \circ \varphi = f$. E se existir uma função linear $g : V \longrightarrow U$ tal que $g \circ \varphi = f$, então

$$g(v) = g(\varphi(1, v)) = (g \circ \varphi)(1, v) = f(1, v) = \bar{f}(v), \quad \forall v \in V.$$

Segue que $\bar{f}$ é única e, portanto, $\mathbb{K} \otimes V \simeq V$. Com raciocínio análogo mostra-se que $V \simeq V \otimes \mathbb{K}$.

$\square$

Proposição A.2.3 *Sejam V e W espaços vetorias. Se $(V \otimes W, \varphi_1)$ é o produto tensorial entre V e W, e $(W \otimes V, \varphi_2)$ é produto tensorial entre W e V, então $V \otimes W \simeq W \otimes V$ como espaços vetoriais.*

Prova.

Defina

$$\begin{array}{rcl} \psi_1 : W \times V & \longrightarrow & V \times W \\ (w, v) & \longmapsto & (v, w), \end{array}$$

e considere a função composição

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 \circ \psi_1 : W \times V & \longrightarrow & V \otimes W \\ (w, v) & \longmapsto & v \otimes w. \end{array}$$

Vejamos que $\varphi_1 \circ \psi_1$ é bilinear. Dados $w, w' \in W, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, teremos que

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 \circ \psi_1(w + \lambda w', v) & = & \varphi_1(\psi_1(w + \lambda w', v)) \\ & = & \varphi_1(v, w + \lambda w') \\ & = & v \otimes (w + \lambda w') \\ & = & v \otimes w + \lambda(v \otimes w') \\ & = & \varphi_1(v, w) + \lambda \varphi_1(v, w') \\ & = & \varphi_1(\psi_1(w, v)) + \lambda \varphi_1(\psi_1(w', v)) \\ & = & (\varphi_1 \circ \psi_1)(w, v)) + \lambda(\varphi_1 \circ \psi_1)(w', v)). \end{array}$$

Analogamente, $(\varphi_1 \circ \psi_1)(w, v + \lambda v') = (\varphi_1 \circ \psi_1)(w, v) + \lambda(\varphi_1 \circ \psi_1)(w, v')$. Por conseguinte existe uma única função linear $f : W \otimes V \longrightarrow V \otimes W$ tal que $f \circ \varphi_2 = \varphi_1 \circ \psi_1$.

$$\begin{tikzcd} W \times V \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[dr, "\varphi_1 \circ \psi_1"'] & W \otimes V \arrow[d, "f"] \\ & V \otimes W \end{tikzcd}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes v_i\right) &= f\left(\varphi_2\left(\sum_{i=1}^{n}(w_i, v_i)\right)\right)\\
&= (f \circ \varphi_2)\left(\sum_{i=1}^{n}(w_i, v_i)\right)\\
&= (\varphi_1 \circ \psi_1)\left(\sum_{i=1}^{n}(w_i, v_i)\right)\\
&= \varphi_1\left(\psi_1\left(\sum_{i=1}^{n}(w_i, v_i)\right)\right)\\
&= \varphi_1\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i, w_i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\varphi_1(v_i, w_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i.
\end{aligned}
$$

Da mesma forma definimos

$$
\begin{aligned}
\psi_2 : V \times W &\longrightarrow W \times V\\
(v, w) &\longmapsto (w, v)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\varphi_2 \circ \psi_2 : V \times W &\longrightarrow W \otimes V\\
(v, w) &\longmapsto w \otimes v.
\end{aligned}
$$

Observamos que $\varphi_2 \circ \psi_2$ é bilinear. Então existe uma única função linear $g : V \otimes W \longrightarrow W \otimes V$ tal que $g \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi_2$.

$$
\begin{tikzcd}
V \times W \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2 \circ \psi_2"'] & V \otimes W \arrow[d, "g"] \\
& W \otimes V
\end{tikzcd}
$$

E teremos

$$
\begin{aligned}
g\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i\right) &= g\left(\varphi_1\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i, w_i)\right)\right)\\
&= (g\circ\varphi_1)\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i, w_i)\right)\\
&= (\varphi_2\circ\psi_2)\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i, w_i)\right)\\
&= \varphi_2\left(\psi_2\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i, w_i)\right)\right)\\
&= \varphi_2\left(\sum_{i=1}^{n}(w_i, v_i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\varphi_2(w_i, v_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes v_i.
\end{aligned}
$$

Com isso, segue que

$$
(g\circ f)\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes v_i\right) = g\left(f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes v_i\right)\right) = g\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes v_i
$$

e

$$
(f\circ g)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i\right) = f\left(g\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i\right)\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \otimes v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i.
$$

Logo, $g\circ f = Id_{W\otimes V}$ e $f\circ g = Id_{V\otimes W}$. Concluimos portanto que $V\otimes W \simeq W\otimes V$.

$\square$

Proposição A.2.4 *Seja* $((V\otimes W)\otimes U, \varphi_1)$ *o produto tensorial entre* $(V\otimes W)$ *e* U, *e* $(V\otimes(W\otimes U), \varphi_2)$ *o produto tensorial entre* V *e* $(W\otimes U)$. *Então* $(V\otimes W)\otimes U \simeq V\otimes(W\otimes U)$ *como espaços vetoriais.*

Prova. Defina a função

$$
\begin{aligned}
f : V\times(W\otimes U) &\longrightarrow (V\otimes W)\otimes U\\
\left(v, \sum_{i=1}^{n} w_i\otimes u_i\right) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n}(v\otimes w_i)\otimes u_i
\end{aligned}
$$

Mostremos que f é bilinear. Para isso, sejam $v_1, v_2 \in V$, $\sum_{i=1}^{n} w_i\otimes u_i, \sum_{j=1}^{m} w_j \otimes u_j \in W\otimes U$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Faça $\beta w_j = w_{n+j}$ e $u_j = u_{n+j}$, daí teremos que

$$
\begin{aligned}
& f\left(v_1+\alpha v_2, \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes u_i + \beta \sum_{j=1}^{m} w_j \otimes u_j\right) \\
= & f\left(v_1+\alpha v_2, \sum_{i=1}^{n+m} w_i \otimes u_i\right) \\
= & \sum_{i=1}^{n+m} ((v_1+\alpha v_2)\otimes w_i)\otimes u_i \\
= & \sum_{i=1}^{n+m} (v_1\otimes w_i + (\alpha v_2)\otimes w_i)\otimes u_i \\
= & \sum_{i=1}^{n+m} (v_1\otimes w_i)\otimes u_i + ((\alpha v_2)\otimes w_i)\otimes u_i \\
= & \sum_{i=1}^{n} (v_1\otimes w_i)\otimes u_i + ((\alpha v_2)\otimes w_i)\otimes u_i \\
+ & \sum_{j=1}^{m} (v_1\otimes (\beta w_j))\otimes u_j + ((\alpha v_2)\otimes (\beta w_j))\otimes u_j \\
= & \sum_{i=1}^{n} (v_1\otimes w_i)\otimes u_i + \alpha\sum_{i=1}^{n} (v_2\otimes w_i)\otimes u_i \\
+ & \beta\sum_{j=1}^{m} (v_1\otimes w_j)\otimes u_j + \alpha\beta\sum_{j=1}^{m} (v_2\otimes w_j)\otimes u_j \\
= & f\left(v_1, \sum_{i=1}^{n} w_i\otimes u_i\right) + \alpha f\left(v_2, \sum_{i=1}^{n} w_i\otimes u_i\right) \\
+ & \beta f\left(v_1, \sum_{j=1}^{m} w_j\otimes u_j\right) + \alpha\beta f\left(v_2, \sum_{j=1}^{m} w_j\otimes u_j\right).
\end{aligned}
$$

Assim, pela propriedade universal, existe única função linear $\bar{f} : V\otimes(W\otimes U) \longrightarrow (V\otimes W)\otimes U$ tal que $f = \bar{f}\circ\varphi_2$.

$$
\begin{tikzcd}
V\times(W\otimes U) \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[dr, "f"'] & V\otimes(W\otimes U) \arrow[d, "\bar{f}"] \\
& (V\otimes W)\otimes U
\end{tikzcd}
$$

Observe ainda que

$$\begin{aligned}
& \bar{f}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes (w_i \otimes u_i)\right) = \bar{f}\left(\varphi_2\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i, w_i \otimes u_i)\right)\right) \\
= \quad & (\bar{f} \circ \varphi_2)\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i, w_i \otimes u_i)\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i, w_i \otimes u_i)\right) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} f(v_i, w_i \otimes u_i) = \sum_{i=1}^{n}(v_i \otimes w_i) \otimes u_i.
\end{aligned}$$

Agora defina

$$\begin{aligned}
g : (V \otimes W) \times U & \longrightarrow V \otimes (W \otimes U) \\
\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i, u\right) & \longmapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes (w_i \otimes u)
\end{aligned}$$

Da mesma maneira que mostramos que f é bilinear mostra-se que g é bilinear. Então, existe uma única função linear $\bar{g} : (V \otimes W) \otimes U \longrightarrow V \otimes (W \otimes U)$ de forma que $g = \bar{g} \circ \varphi_1$.

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes W) \times U \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "g"'] & (V \otimes W) \otimes U \arrow[d, "\bar{g}"] \\
& V \otimes (W \otimes U)
\end{tikzcd}$$

E note que

$$\begin{aligned}
& \bar{g}\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i \otimes w_i) \otimes u_i\right) = \bar{g}\left(\varphi_1\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i \otimes w_i, u_i)\right)\right) \\
= \quad & (\bar{g} \circ \varphi_1)\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i \otimes w_i, u_i)\right) = g\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i \otimes w_i, u_i)\right) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} g(v_i \otimes w_i, u_i) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes (w_i \otimes u_i).
\end{aligned}$$

Dessa forma, percebemos que

$$\begin{aligned}
(\bar{f} \circ \bar{g})\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i \otimes w_i) \otimes u_i\right) \quad &= \quad \bar{f}\left(\bar{g}\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i \otimes w_i) \otimes u_i\right)\right) \\
= \bar{f}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes (w_i \otimes u_i)\right) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n}(v_i \otimes w_i) \otimes u_i \Longrightarrow \bar{f} \circ \bar{g} = Id_{(V \otimes W) \otimes U}
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
(\bar{g}\circ\bar{f})\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\otimes(w_i\otimes u_i)\right) &= \bar{g}\left(\bar{f}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\otimes(w_i\otimes u_i)\right)\right) \\
= \bar{g}\left(\sum_{i=1}^{n}(v_i\otimes w_i)\otimes u_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} v_i\otimes(w_i\otimes u_i) \Longrightarrow \bar{g}\circ\bar{f} = Id_{V\otimes(W\otimes U)}.
\end{aligned}
$$

donde segue que $(V\otimes W)\otimes U \simeq V\otimes(W\otimes U)$.

□

Agora vamos estabelecer uma base para um espaço vetorial $V\otimes W$.

Proposição A.2.5 *Sejam V e W espaços vetoriais com bases $\{e_i\}_{i\in I}$, e $\{f_j\}_{j\in J}$ respectivamente, então $\{e_i\otimes f_j\}_{i\in I, j\in J}$ é uma base para $V\otimes W$.*

Prova. Já vimos que os elementos da forma $v\otimes w$ geram $V\otimes W$, mas para $v\in V$ e $w\in W$ podemos escrever $v=\sum_{l=1}^{n}\alpha_{i_l}e_{i_l}$ e $w=\sum_{k=1}^{m}\beta_{j_k}f_{j_k}$, donde $v\otimes w = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{i_l}\beta_{j_k}(e_{i_l}\otimes f_{j_k})$ e portanto $\{e_i\otimes f_j\}_{i\in I, j\in J}$ é um conjunto de geradores para $V\otimes W$.

Temos que mostrar ainda que o conjunto $\{e_i\otimes f_j\}_{i\in I, j\in J}$ é LI. Para isso suponha que a seguinte soma finita seja nula

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{i_l,j_k}(e_{i_l}\otimes f_{j_k}) = 0,$$

não havendo pares de índices (i_l, j_k) repetidos. Para cada par de índices (i_l, j_k) que aparece na soma, defina o funcional linear $\theta_{i_l,j_k} = dx_{i_l}\otimes dy_{j_k}$, em que dx_{i_l} e o funcional de V que na base é dado por $dx_{i_l}(e_i) = \delta_{i_l,i}$ e dy_{j_k} é o funcional de W que na base é dado por $dy_{j_k}(f_j) = \delta_{j_k,j}$. Para cada par de índices (i_l, j_k), aplicando θ_{i_l,j_k} em ambos os lados da soma, temos $\alpha_{i_l,j_k} = 0$, ou seja, $\{e_i\otimes f_j\}_{i\in I, j\in J}$ é LI.

□

Observe que se $dimV < \infty$ e $dimW < \infty$, segue de imediato que $dim(V\otimes W) = dim(V)dim(W)$.

Proposição A.2.6 *Nas condições da proposição anterior, se $v\otimes w = 0$ em $V\otimes W$ então $v = 0$ ou $w = 0$.*

Prova. Vamos supor $v\neq 0$ e vamos mostrar que $w = 0$. Dessa forma, podemos escrever $v=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{i_k}e_{i_k}$ com todos os α_{i_k} não nulos. Como $w=\sum_{l=1}^{m}\beta_{j_l}f_{j_l}$, então

$$v\otimes w = \left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{i_k}e_{i_k}\right)\otimes\left(\sum_{l=1}^{m}\beta_{j_l}f_{j_l}\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\alpha_{i_k}\beta_{j_l}(e_{i_k}\otimes f_{j_l}) = 0$$

Pela proposição anterior , temos que $\alpha_{i_k}\beta_{j_l} = 0$ para todo par de índices (i_k, j_l). Mas como escolhemos $\alpha_{i_k}\neq 0$ para todo índice i_k, segue que $\beta_{j_l} = 0$ para todo índice j_l e, portanto, $w = 0$.

$\square$

Observação A.2.7 *Note que para um elemento* $\sum_{j=1}^{n} v_j \otimes w_j \in V \otimes W$, *sem perda de generalidade, podemos supor que* $\{v_j\}_{j=1}^{n}$ *ou* $\{w_j\}_{j=1}^{n}$ *é LI. Se supormos que* $\{w_j\}_{j=1}^{n}$ *não é LI, então existe um subconjunto finito* $\{f_{j_k}\}_{k=1}^{m}$ *da base* $\{f_j\}_{j\in J}$ *de* W *de modo que todos* w_j *podem ser escritos da forma* $w_j = \sum_{k=1}^{m} \beta_{j_k} f_{j_k}$. *Logo, podemos escrever*

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \otimes w_j = \sum_{j=1}^{n} v_j \otimes \left(\sum_{k=1}^{m} \beta_{j_k} f_{j_k} \right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{j_k} v_j \right) \otimes f_{j_k},$$

o que faz com que as segundas entradas fiquem LI.

Proposição A.2.8 *Sejam* $V_1, ..., V_n, U$ *espaços vetoriais e* $f : V_1 \times ... \times V_n \longrightarrow U$ *uma função n-linear, então existe uma única função* $\bar{f} : V_1 \otimes ... \otimes V_n \longrightarrow U$ *de modo que* $f(v_1, ..., v_n) = \bar{f}(v_1 \otimes ... \otimes v_n)$.

Prova. Faremos por indução sobre n. O caso $n = 2$ vem da definição de produto tensorial. Suponha o resultado válido para $2 \leq i \leq n-1$, então para cada $v_n \in V_n$ fixado a função $f_{v_n} : V_1 \times ... \times V_{n-1} \longrightarrow U$ dada por $f_{v_n}(v_1, ..., v_{n-1}) = f(v_1, ..., v_{n-1}, v_n)$ é (n-1)-linear, logo, existe uma única função linear $\bar{f}_{v_n} : V_1 \otimes ... \otimes V_{n-1} \longrightarrow U$ tal que $\bar{f}_{v_n}(v_1 \otimes ... \otimes v_{n-1}) = f(v_1, ..., v_{n-1}, v_n)$. Defina então a função $\hat{f} : (V_1 \otimes ... \otimes V_{n-1}) \times V_n \longrightarrow U$, com $\hat{f}(v_1 \otimes ... \otimes v_{n-1}, v_n) = \bar{f}_{v_n}(v_1 \otimes ... \otimes v_{n-1})$. Por construção $\hat{f}$ é bilinear, donde segue o resultado.

$\square$

Proposição A.2.9 *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita* n *e* V' *o dual algébrico de* V. *Então* $\underbrace{V' \otimes ... \otimes V'}_{m \quad vezes} \simeq (\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{m \quad vezes})'$.

Prova. Vejamos o caso em que $m = 2$. Defina a função

$$\begin{array}{rcl} \Phi : V' \times V' & \longrightarrow & (V \otimes V)' \\ (f, g) & \longmapsto & \Phi(f, g)(v \otimes w) \end{array}$$

em que $\Phi(f, g)(v \otimes w) = f(v)g(w)$ para $v, w \in V$.

A aplicação Φ é bilinear, pois dadas $f_1, f_2, g \in V'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{array}{rcl} \Phi(f_1 + \lambda f_2, g)(v \otimes w) & = & (f_1 + \lambda f_2)(v)g(w) = f_1(v)g(w) + \lambda f_2(v)g(w) \\ & = & \Phi(f_1, g)(v \otimes w) + \lambda \Phi(f_2, g)(v \otimes w). \end{array}$$

Com isto, podemos estender Φ para o produto tensorial, i.é, existe uma única $\widehat{\Phi}$ tal que o diagrama abaixo comute

$$\begin{tikzcd} V' \times V' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & V' \otimes V' \arrow[d, "\widehat{\Phi}"] \\ & (V \otimes V)' \end{tikzcd}$$

A função φ é a mesma da contrução do protudo tensorial (proposição A.1.3) e

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i \otimes g_i\right)(v \otimes w) &= \sum_{i=1}^{k} f_i(v) g_i(w) \\ &= \Phi(f,g)(v \otimes w) = f(v)g(w). \end{aligned}$$

Mostremos que $\widehat{\Phi}$ é bijetiva. Seja $\sum_{i=1}^{k} f_i \otimes g_i \in V' \otimes V'$, com $\{f_i\}_{i=1}^{k}$ LI (observação A.2.7), tal que $\widehat{\Phi}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i \otimes g_i\right) = 0$. Como é $\{f_i\}_{i=1}^{k}$ LI, pelo lema 1.4.1, existem $\{v_i\}_{i=1}^{k} \in V$ de modo que $f_i(v_j) = \delta_{ij}, i, j \in \{1, ..., k\}$. Logo, para cada $j \in \{1, ...k\}$,

$$g_j(w) = \sum_{i=1}^{k} \delta_{ij} g_i(w) = \sum_{i=1}^{k} f_i(v_j) g_i(w) = \widehat{\Phi}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i \otimes g_i\right)(v_j \otimes w) = 0$$

para $w \in V$ arbitrário. Segue-se que $g_j \equiv 0, \forall j \in \{1, ..., k\}$, o que implica em $\sum_{i=1}^{k} f_i \otimes g_i \equiv 0$. Donde temos que $ker(\widehat{\Phi}) = 0$ e portanto $\widehat{\Phi}$ é injetiva.

Agora, pelo fato de $n = dim(V) = dim(V')$, e utilizando a proposição A.2.5, vemos que $dim((V \otimes V)') = dim(V \otimes V) = (dimV)^2 = (dim(V'))^2 = dim(V' \otimes V')$. Concluimos, como $\widehat{\Phi}$ é linear e injetiva, que $\widehat{\Phi}$ é sobrejetiva, de modo que $V' \otimes V' \simeq (V \otimes V)'$.

Suponhamos, por hipótese de indução, que $(V')^{\otimes m} \simeq (V^{\otimes m})'$, em que $(V')^{\otimes m} = \underbrace{V' \otimes ... \otimes V'}_{m \quad vezes}$ e $(V^{\otimes m})' = (\underbrace{V \otimes ... \otimes V}_{m \quad vezes})'$. Defina

$$\begin{aligned} \Psi : (V')^{\otimes m} \times V' &\longrightarrow (V^{\otimes (m+1)})' \\ \left(\sum_{i=1}^{k} f_{1_i} \otimes \cdots \otimes f_{m_i}, f_{m+1}\right) &\longmapsto \Psi\left(\sum_{i=1}^{k} f_{1_i} \otimes \cdots \otimes f_{m_i}, f_{m+1}\right) \end{aligned}$$

em que $\Psi\left(\sum_{i=1}^{k} f_{1_i} \otimes \cdots \otimes f_{m_i}, f_{m+1}\right)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = \left(\sum_{i=1}^{k} f_{1_i}(v_1) \cdots f_{m_i}(v_m)\right) f_{m+1}(v_{m+1})$.

Agora, da mesma forma como fizemos anteriomente, Ψ é bilinear, logo pode ser estendida para $\widehat{\Psi} : (V')^{\otimes (m+1)} \longrightarrow (v^{\otimes (m+1)})'$ no produto tensorial. Como V tem dimensão finita, $(V')^{\otimes m}$ também tem dimensão finita. A injetividade e a sobrejetividade de $\widehat{\Psi}$ prova-se de modo análogo.

$\square$

Proposição A.2.10 *Sejam V e W espaços vetoriais, e $T : V \longrightarrow W$ uma função linear. Então $ker(T \otimes T) = ker(T) \otimes V + V \otimes ker(T)$.*

Prova. É claro que $ker(T) \otimes V + V \otimes ker(T) \subseteq ker(T \otimes T)$. A outra inclusão mostraremos por indução sobre n, em que n é o número de termos de algum somatório $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i$ com $\{w_i\}_{i=1}^{n}$ LI representando um elemento $x \in ker(T \otimes T)$, o que é possível de acordo com a observação A.2.7. Para $n = 1$, temos $x = v \otimes w$. Aplicando $T \otimes T$ em x segue que $T(v) \otimes T(w) = 0$. Logo, pela proposição A.2.6 temos que $T(v) = 0$ ou $T(w) = 0$, ou seja, $x \in ker(T) \otimes V + V \otimes ker(T)$.

Suponha válido para $n-1$, tome $x = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i \in ker(T \otimes T)$ e suponha que existe i_0 tal que $T(v_{i_0}) \neq 0$ e $T(w_{i_0}) \neq 0$. Em particular existe um funcional $f \in W'$ de modo que $f(T(w_{i_0})) \neq 0$. Para $j \neq i_0$ defina $k_j = \dfrac{f(T(w_j))}{f(T(w_{i_0}))}$ e $\overline{w_j} = w_j - k_j w_{i_0}$; e para i_0 defina $\overline{w_{i_0}} = w_{i_0}$. Observe que $f(T(\overline{w_j})) = 0, \forall j \neq i_{i_0}$ e que $\{\overline{w_j}\}_{j=1}^{n}$ continua sendo LI. De fato,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_j \overline{w_j} &= 0 \Longrightarrow \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} \alpha_j (w_j - k_j w_{i_0}) + \alpha_{i_0} w_{i_0} \\
&= \sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} \alpha_j w_j - \left(\left(\sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} \alpha_j k_j \right) + \alpha_{i_0} \right) w_{i_0} = 0.
\end{aligned}
$$

Como $\{w_i\}_{i=1}^{n}$ é LI segue que $\alpha_j = 0, \forall j \neq i_0$, e voltando à igualdade do lado esquerdo da implicação temos que $\alpha_j = 0$.

Podemos então escrever $x = \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i} \otimes \overline{w_i}$, em que $\overline{v_j} = v_j$ para $j \neq i_0$ e $\overline{v_{i_0}} = v_{i_0} + \sum_{j=1, j\neq i_0} k_j v_j$. Afirmamos que $\overline{v_{i_0}} \in ker(T)$, de fato se $T(\overline{v_{i_0}}) \neq 0$, então existe $g \in W'$ tal que $g(T(\overline{v_{i_0}})) \neq 0$ e, dessa forma

$$
\begin{aligned}
0 &= (g \otimes f)((T \otimes T)(x)) = (g \otimes f) \left((T \otimes T) \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{v_i} \otimes \overline{w_i} \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} g(T(\overline{v_i})) f(T(\overline{w_i})) = g(T(\overline{v_{i_0}})) f(T(\overline{w_{i_0}})) \neq 0
\end{aligned}
$$

o que é um absurdo. Por conseguinte temos

$$
(T \otimes T) \left(\sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} \overline{v_j} \otimes \overline{w_j} \right) = (T \otimes T) \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{v_j} \otimes \overline{w_j} \right) - (T \otimes T)(\overline{v_{i_0}} \otimes \overline{w_{i_0}}) = 0.
$$

Pela hipótese de indução $\sum_{j=1, j\neq i_0}^{n} \overline{v_j} \otimes \overline{w_j} \in ker(T) \otimes V + V \otimes ker(T)$ e como $\overline{v_{i_0}} \in ker(T)$, segue que $\overline{v_{i_0}} \otimes \overline{w_{i_0}} \in ker(T) \otimes V$. Portanto $x = \sum_{j=1}^{n} \overline{v_j} \otimes \overline{w_j} \in ker(T) \otimes V + V \otimes ker(T)$. Caso não existisse i_0 com $T(v_{i_0}) \neq 0$ e $T(w_{i_0}) \neq 0$, então x já estaria escrito como elemento de $ker(T) \otimes V + V \otimes ker(T)$.

□

Apêndice B

Notação de Sweedler

Este apêndice foi retirado da dissertação de mestrado de GONÇALVES [2] e tem como objetivo deixar o texto autocontido. E através dele podemos justificar a notação de Sweedler para o coproduto. Tal notação pode codificar a informação necessária de maneira simples de modo a demonstrar resultados relacionados com um esforço significativamente menor em comparação a utilizar diagramas comutativos ou composição de funções.

B.1 Coproduto

Nesta seção C denotará uma coálgebra e H um álgebra de Hopf.

Conforme mencionado em (1.6) estaremos usando a seguinte notação para o coproduto: $\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}, \forall c \in C$. Fixada esta notação para o coproduto, estaremos interessados em aplicar funções em $\Delta(c)$. Mais especificamente, aplicaremos o produto tensorial de funções e utilizaremos a notação $(f \otimes g)\Delta(c) = \sum f(c_{(1)}) \otimes g(_{(2)})$, ou seja, esta notação para funções significa simplesmente que aplicamos cada função na sua respectiva coordenada do produto tensorial. Esse tipo de interpretação é justificada pela proposiçao A.2.1 que tem como consequencia se $x = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i} \otimes \overline{w_i}$ então $(f \otimes g)(x) = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) \otimes g(w_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{v_i}) \otimes g(\overline{w_i})$.

Temos também, ao aplicarmos o coproduto após o outro, as notações $(\Delta \otimes id)\Delta(c) = \sum c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)}$ e $(id \otimes \Delta)\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)}$. Indutivamente criamos notações para o coproduto sendo aplicado diversas vezes, por exemplo $(\Delta \otimes id \otimes id) \circ \Delta(c) = \sum c_{(1)(1)(1)} \otimes c_{(1)(1)(2)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)}$. Conforme provaremos na próxima proposição a co-associatividade se estende ao aplicarmos o coproduto diversas vezes, e esse último elemento será escrito simplesmente por $\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)} \otimes c_{(4)}$.

Antes do primeiro resultado, denotaremos por $\Delta_{i,n}$ a aplicação em $C^{\otimes n}$ que aplica o coproduto exatamente na $i-$ésima entrada, por exemplo $\Delta_{2,3} = id \otimes \Delta \otimes id$.

Proposição B.1.1 *Para C uma coálgebra, é válido*

$$\Delta_{i_n,n} \circ \Delta_{i_{n-1},n-1} \circ ... \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1} = \Delta_{j_n,n} \circ \Delta_{j_{n-1},n-1} \circ ... \circ \Delta_{j_2,2} \circ \Delta_{j_1,1}$$

para qualquer escolha de índices $1 \leq i_k, j_k \leq k, 1 \leq k \leq n$.

Prova. Procederemos por indução sobre n. O caso $n=2$ vem do axioma da coassociatividade e note que deste axioma também temos que $\Delta_{i,n'} \circ \Delta_{i,n'-1} = \Delta_{i+1,n'} \circ \Delta_{i,n'-1}$ para $1 \leq i \leq n'-1$.

Suponha válido para $n-1$. Se $i_n = j_n$ basta substituir i_k por j_k para todo $1 \leq k \leq n-1$, o que é possível pela hipótese de indução. Suponha então, sem perda de generalidade, que $i_n < j_n$. Pela hipótese de indução podemos trocar i_{n-1} por i_n, isto é, podemos escrever $\Delta_{i_n,n} \circ \Delta_{i_{n-1},n-1} \circ ... = \Delta_{i_n,n} \circ \Delta_{i_n,n-1} \circ ...$, e utilizar a observação do parágrafo anterior para em seguida trocar i_n por i_n+1, ou seja, $\Delta_{i_n,n} \circ \Delta_{i_n,n_1} \circ ... = \Delta_{i_n+1,n} \circ \Delta_{i_n,n-1} \circ ....$ Se $i_n+1 < j_n$, basta igualar os demais índices como no caso anterior, senão troque i_{n-1} por i_n+1 e i_n+1 por i_n+2 e assim sucessivamente até igualar os índices i e j de subíndice n. Os demais podem ser igualados pela hipótese de indução.

□

Por causa dessa proposição, iremos denotar $\Delta_{i_n,n} \circ \Delta_{i_{n-1},n-1} \circ ... \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1}(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes ... \otimes c_{(n)} \otimes c_{(n+1)}$. Observe que o maior índice na notação do coproduto menos um é exatamente a quantidade de vezes que aplicamos o coproduto. Assim como generalizamos a coassociatividade, podemos fazer o mesmo com a counidade. Para isso, defina $\varepsilon_{i,n}$ de forma análoga a $\Delta_{i,n}$, a saber, $\varepsilon_{i,n}$ aplica ε na i-ésima entrada do produto tensorial $C^{\otimes n}$.

Proposição B.1.2 *Para C uma coálgebra é válido*

$$\varepsilon_{i_n,n} \circ \Delta_{i_n,n-1} \circ ... \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1} = \Delta_{i_{n-2},n-2} \circ ... \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1}$$

para qualquer escolha de índices $i \leq i_k \leq k, 1 \leq k \leq n$, ou utilizando a notação que está sendo definida

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i_n,n}\left(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes ... \otimes c_{(n)}\right) &= \sum c_{(1)} \otimes \cdots \otimes \varepsilon(c_{(i_n)}) \otimes \cdots \otimes c_{(n)} \\ &= \sum c_{(1)} \otimes \cdots \otimes c_{(n-1)} \end{aligned}$$

para $c \in C$, sendo que um dos produtos tensoriais que acompanham $\varepsilon(c_{(i_n)})$ deve ser pensado como o produto por escalar.

Prova. Basta trocar i_{n-1} por i_n, que é possível pela proposição anterior, e em seguida utilizar o axioma da counidade para substituir $\varepsilon_{i_n,n} \circ \Delta_{i_n,n-1}$ por $id^{\otimes n-1}$. Se $i_n = n$, trocamos i_n por $n-1$ e usamos o outro axioma de counidade.

□

Para exemplificarmos a utilização da proposição acima, escrevemos $(f \otimes g)\Delta(c) = (f \otimes g)(\varphi \otimes id)(id \otimes \varepsilon \otimes id)(\Delta \otimes id)\Delta(c)$ por $f(c_{(1)}) \otimes g(c_{(2)}) = f(c_{(1)}\varepsilon(c_{(2)})) \otimes g(c_{(3)})$, onde φ dá o isomorfismo $C \simeq C \otimes \mathbb{K}$. Como supomos f linear e $\varepsilon(c_{(2)})$ um escalar, podemos continuar a igualdade com $f(c_{(1)}) \otimes g(\varepsilon(c_{(2)})c_{(3)})$.

Para finalizarmos a discussão sobre a notação de Sweedler para o coproduto, vamos passar para o caso de álgebras de Hopf e o axioma da antípoda. De forma análoga ao coproduto e à counidade, definimos $\eta_{i,n}$, $S_{i,n}$ e $\mu_{i,n}$, com os seguintes detalhes: para o caso do produto, temos que μ aplica nas i-ésima e $(i+1)$-ésima coordenadas; e para o caso da unidade $\eta_{i,n}$ aplica em $H^{\otimes n-1}$ com uma cópia de $\mathbb{K}$ entre a $(i-1)$-ésima e a i-esima coordenadas.

Proposição B.1.3 *Seja H uma álgebra de Hopf. Então são válidas as seguintes identidades:*

$$\mu_{i_n,n} \circ S_{i_n,n} \circ \Delta_{i_{n-1},n-1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1} = \eta_{i_n,n-1} \circ \varepsilon_{i_n,n-1} \circ \Delta_{i_{n-2},n-2} \circ \cdots \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1}$$

$$\mu_{i_n-1,n} \circ S_{i_n,n} \circ \Delta_{i_{n-1},n-1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1} = \eta_{i_n-1,n-1} \circ \varepsilon_{i_n,n-1} \circ \Delta_{i_{n-2}-1,n-2} \circ \cdots \circ \Delta_{i_2,2} \circ \Delta_{i_1,1}$$

para quaisquer escolhas de índices $1 \leq i_k \leq k$, $1 \leq k \leq n$ com $i_n \neq n$ no primeiro caso e $i_n \neq 1$ no segundo. Em termos de nossa notação temos

$$\sum h_{(1)} \otimes \cdots \otimes S(h_{(i_n)})h_{(i_n+1)} \otimes \cdots \otimes h_{(n)} = \sum h_{(1)} \otimes \cdots \otimes \varepsilon(h_{(i_n)})1_H \otimes \cdots \otimes h_{(n-1)}$$

$$\sum h_{(1)} \otimes \cdots \otimes h_{(i_n-1)}S(h_{(i_n)}) \otimes \cdots \otimes h_{(n)} = \sum h_{(1)} \otimes \cdots \otimes \varepsilon(h_{(i_n-1)})1_H \otimes \cdots \otimes h_{(n-1)}$$

para $h \in H$.

Prova. Basta prosseguir como nas outras proposições, trocando i_{n-1} por i_n e utilizando o axioma da antípoda na coordenada apropriada.

$\square$

Exemplo B.1.4 *A cadeia de aplicações equivalentes*

$$\begin{aligned} & (f \otimes g)\Delta h = (f \otimes g)(\varphi \otimes id)(id \otimes \varepsilon \otimes id)(\Delta \otimes id)\Delta(h) = \\ = \;& (f \otimes g)(\mu \otimes id)(id \otimes \eta \otimes id)(id \otimes \varepsilon \otimes id)(\Delta \otimes id)\Delta(h) \\ = \;& (f \otimes g)(\mu \otimes id)(id \otimes \mu \otimes id)(id \otimes S \otimes id \otimes id)(\Delta \otimes id \otimes id)(\Delta \otimes id)\Delta(h). \end{aligned}$$

pode ser reescrita, utilizando a notação, como

$$\begin{aligned} & \sum f(h_{(1)}) \otimes g(h_{(2)}) = \sum f(h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)})) \otimes g(h_{(3)}) = \\ = \;& \sum f(h_{(1)}\varepsilon(h_{(2)})1_H) \otimes g(h_{(3)}) = \sum f(h_{(1)}S(h_{(2)})h_{(3)}) \otimes g(h_{(4)}) \end{aligned}$$

não só ocupa menos espaço para escrever, como é muito mais simples para se enxergar quais axiomas podemos utilizar. Esses tipos de técnicas de contrair e expandir ε serão utilizadas ao longo do texto e no caso acima, a segunda igualdade é tão trivial que nem precisamos escrever.

Referências Bibliográficas

[1] A. I. KOSTRIKIN an YU. I. MANIN. "Linear Algebra and Geometry", Gordon and Breach Science Publishers (1989).

[2] GONÇALVES, Gilles. "Geometria de fibrados não-comutativos", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Matemática (2005).

[3] JACOBSON, Nathan."Basic Algebra II", W.H.Freeman and Company, New York (1989).

[4] KLIMYK, Anatoli, SCHMÜDGEN, Konrad. "Quantum Groups and Their Representations", Springer-Verlag (1997).

[5] TIMMERMANN, Thomas. "An Invitation to Quantum Groups and Duality", European Mathematical Society (2008).