UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA MATEMÁTICA

UM ESTUDO SOBRE DEMONSTRAÇÕES EM LIVROS DE ENSINO MÉDIO

Orientanda **Mayna Volker dos Santos**

Orientadora **Neri Terezinha Both Carvalho**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado por Mayna Volker dos Santos

Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura

Departamento de Matemática

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Universidade Federal de Santa Catarina

UM ESTUDO SOBRE DEMONSTRAÇÕES EM LIVROS DE ENSINO MÉDIO

Composição da Banca: Neri Terezinha Both Carvalho (Orientadora)
Nereu Estanislau Burin
Josiane Marques Motta

Florianópolis, 16 fevereiro 2009.

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 14/ CCM/ 2009.

Prof ª. Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

Banca Examinadora:

Prof ª. Neri Terezinha Both Carvalho
Orientadora

Prof . Nereu Estanislau Burin

Prof ª. Josiane Marques Motta

"Se você quer saber o que diz uma proposição matemática, veja o que sua demonstração prova."

Ludwing Wittgenstein

Agradecimentos

Aos meus pais, Márcio e Mirna, minha irmã Elisa, a vocês meu eterno carinho e gratidão.

À professora Neri Terezinha Both Carvalho, minha orientadora, pelo apoio e dedicação durante o desenvolvimento desse trabalho.

Aos professores Nereu Estanislau Burin e Josiane Marques Motta por aceitarem o convite para participar da Banca Examinadora.

Ao meu namorado Adriano que me deu apoio, força e carinho nos momentos em que eu achava que nada ia dar certo. Obrigado por estar ao meu lado.

A todos os colegas e amigos que estiveram comigo nesses quatro anos de estudo e dedicação.

Um agradecimento especial para os amigos Rodrigo Luis de Souza e Thiane Pereira Ponceta Coliborio, foram quatro anos juntos, horas e horas de estudos, ombro amigo nos momentos em que a tristeza e o desanimo batiam. Anos que nos aproximaram e nos tornaram amigos, obrigado pelo apoio e pela amizade.

Sumário

Introdução

Realizamos um estudo sobre os tipos de demonstrações em Matemática e buscamos ver como elas têm lugar nos livros didáticos de ensino médio. Os pesquisadores na área da Educação Matemática vêem mostrando a necessidade da implementação de provas e demonstrações no currículo do ensino básico. A “prova” num sentido mais amplo como conteúdo é um recurso bastante rico para as salas de aula. O exercício de produzir provas leva a conjecturas e argumentações, raciocínios muito importantes para a formação do conhecimento.

No primeiro capítulo estudamos os tipos de demonstrações matemáticas e exemplificamos cada uma delas. No capítulo seguinte escolhemos dois livros didáticos de ensino médio para estudar os tipos, a quantidade de demonstrações e em que contexto elas aparecem.

Por fim apresentaremos a conclusão de nosso estudo.

Capítulo 1 – Tipos de Demonstrações Matemáticas

As demonstrações são técnicas que validam uma conjectura. Os tipos de provas surgem em função do tipo de resultado teórico e ou do nível de ensino. Em um processo de transposição didática, ao elementarizar um saber, podemos aceitar justificativas mais fracas, como por exemplo, um convencimento por meio de dobradura, um desenho etc. No formalismo matemático,estas justificativas não são aceitas.

Antes de falar dos tipos de demonstração abordaremos alguns termos utilizados para expressar um resultado teórico e o que se entende por prova matemática.

1.1. Termos usados para expressar resultados

Neste capítulo iremos fazer um estudo sobre os termos usados para designar asserções matemáticas, tipos de demonstrações em matemática e exemplificaremos cada tipo.

Segundo Polya (1995), na Matemática, a palavra *teorema* é usada para designar resultados teóricos de grande importância. Além deste são usados para expressar resultados os seguintes termos:

- Proposição: é uma sentença não associada a algum outro teorema, tem importância matemática menor que a de um teorema.
- Lema: é um “teorema auxiliar”. A palavra é de origem grega e sua tradução literal seria “que se admite”.
- Corolário: é um teorema que se demonstra facilmente pelo exame de outro teorema que se acaba de demonstrar. A palavra é de origem grega e sua tradução mais literal seria “galardão”, ou “recompensa”.

Também existem termos que denotam afirmações não demonstráveis, noções mais elementares que são utilizadas para demonstrar os teoremas, as proposições, os lemas e os corolários. São eles:

- Axiomas ou Postulados: são afirmações consideradas como verdadeiras sem demonstrações. Estes são hipóteses iniciais das quais outros enunciados são logicamente derivados;
- Definição: são descrições do significado de termos por meio de outros termos que se supõe sejam bem conhecidos.

Como exemplo, citamos um axioma de incidência da geometria Euclidiana "dados dois pontos distintos, existe uma única reta que contém ambos os pontos."

1.2. O que é uma prova em Matemática?

Uma prova matemática valida uma afirmação teórica. As provas podem ser empíricas, quando baseadas em desenho ou dobraduras; ou formais. A demonstração é um tipo de prova formal.

A palavra *demonstração* é usada com vários sentidos em diferentes contextos. Mas todos têm a mesma idéia: a de justificar ou validar uma afirmação fornecendo razões ou argumentos. Segundo Moles (1981) em Matemática e Língua Materna "Demonstrar um fato é construir um sentimento de evidência deste em um indivíduo receptor, comunicando-lhe uma mensagem cujos elementos formam uma séria de evidências elementares". Assim, a noção de demonstração inclui tanto a de proposições da Matemática quanto a de proposições científicas em geral, ou mesmo proposições de qualquer natureza.

Em matemática uma afirmação (teorema, proposição, lema, corolário), que não seja um axioma ou uma definição, só é verdadeira se tiver uma prova, ou seja, uma demonstração formal. Essa demonstração é uma sucessão finita de argumentos restrita as regras da lógica mostrando que um enunciado é verdadeiro quando se assume certos axiomas, definições e teoremas já demonstrados.

Podemos dizer que a idéia de demonstração formal foi transmitida à humanidade por um homem e um livro: Euclides e seus Elementos. Em particular a Geometria no livro de Euclides, está organizada de maneira sistemática.

> "A Geometria, tal como apresentada nos Elementos de Euclides, não é uma simples coleção de fatos, mas sim um sistema lógico. Os axiomas, as definições e as proposições não estão relacionadas em seqüência aleatória, mas sim dispostos em perfeita ordem. Cada proposição está de tal maneira situada que ela pode basear-se nos axiomas, definições e proposições que a precedem. [...] A Geometria euclidiana é, não somente um sistema lógico, como também o primeiro e grande exemplo de tal sistema."
> (POLYA, 1995, p. 116)

Para Fuchs (1970) o colorido e a variedade da matemática devem-se ao poder criador dos matemáticos utilizado nas mais variadas demonstrações. As demonstrações constituem os fios da imensa rede que entrelaça as proposições de uma teoria matemática.

A seguir serão detalhados alguns tipos de demonstração, elucidando seus princípios

1.2.1. Demostração por Absurdo

Na prova por absurdo assumimos como hipótese, ou seja, como verdadeiro, o contrário do que queremos demonstrar e então chegamos a uma contradição, isto é, uma proposição que sabemos que é falsa.

Exemplo 1:

Provar que existem infinitos números primos.

Demonstração: Suponha por absurdo, que existem *n* números primos, isto é, uma quantidade finita, denotados por $p_1, p_2, ..., p_n$. Seja $m = p_1.p_2...p_n + 1$, como *m* é um número inteiro maior que 1, *m* ou é primo ou é divisível por um número primo (Teorema fundamental da Aritmética).

Note que *m* não é divisível por nenhum dos números $p_1, p_2, ..., p_n$, pois o resto da divisão é 1. Portanto *m* é primo, absurdo, pois contradiz a nossa hipótese de que existem *n* números primos. Logo nossa hipótese esta errada e, portanto existem infinitos números primos.

Exemplo 2:

Provar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Demonstração: Suponha por absurdo que $\sqrt{2}$ é um número racional, isto é, existem *p* e *q* pertencente aos inteiros, tal que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, com mdc(*p, q*) = 1.

Elevando os dois lados ao quadrado temos:

$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$,

logo $2 = \frac{p^2}{q^2}$ e

então $p^2 = 2q^2$

Como $p^2 = 2q^2$, então p^2 *é* par, logo *p* também é par. Portanto pode ser escrito da forma 2*n*, substituindo na ultima igualdade ficamos com:

$(2n)^2 = 2q^2$ e assim

$4n^2 = 2q^2$, simplificando temos:

$2n^2 = q^2$

Note que q também é um número par, absurdo, pois contradiz a nossa hipótese de que mdc(p,q) = 1. Logo $\sqrt{2}$ é um número irracional.

1.2.2. Demonstração por Indução

"O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais." (LIMA, 1998)

A indução matemática é um método de prova usado para demonstrar muitas proposições. Ele consiste em demonstrar que um enunciado é verdadeiro para um valor inicial, e então demonstrar que o processo usado para ir de um valor para o próximo é valido. Se ambas as demonstrações forem feitas, então qualquer valor pode ser obtido usando a repetição desse processo.

Existem duas formas de demonstração por indução.

Indução – 1ª forma

Suponhamos que $\forall n \in N$ seja dada uma afirmação a(n) tal que :

(i) a(0) é verdadeira.

(ii) Para $k \in N$, a(k + 1) é verdadeiro sempre a(k) for verdadeira.

Então, a(n) é verdadeira $\forall n \in N$.

Indução – 2ª forma

Suponhamos que $\forall n \in N$ seja dada uma afirmação a(n) tal que :

(i) a(0) é verdadeira.

(ii) Para cada inteiro m > 0, a(m) é verdadeira sempre que a(k) for verdadeira para $0 \leq k < m$.

Então, a(n) é verdadeira $\forall n \in N$.

Exemplo 1:

(Algoritmo de Euclides) Sejam $n, d \in N$ e $d > 0$. Então existem únicos $q, r \in N$ tais que $n = q.d + r$ e $0 \leq r < d$.

Demonstração: Vamos fazer a demonstração usando indução da 2ª forma sobre *n*.

Se $n < d$ existem $q = 0, r = n$, assim podemos assumir $n \geq d > 0$. Observe que o caso $n = 0$ está incluido aqui.

Então temos $0 \leq n - d < n$ e pela hipótese (ii) de indução (2ª forma) que $\exists\, q_1, r \in N$ tais que $n - d = q_1.d + r$ onde $0 \leq r < d$ e daí segue que $n = (q_1 + 1)d + r$ onde $0 \leq r < d$. Assim existem $q = q_1 + 1$ e $r \in N$ como queríamos demonstrar.

Vamos provar a unicidade por absurdo. Suponha que existam q_1, r_1, q_2, $r_2 \in N$ tais que $n = q_1.d + r_1$, $0 \leq r_1 < d$ e $n = q_2.d + r_2$, $0 \leq r_2 < d$. Logo, $q_1.d + r_1 = q_2.d + r_2$.

Como $d > 0$ é suficiente provarmos que $r_1 = r_2$ pois nesse caso teríamos $q_1.d = q_2.d$, ou seja, $q_1 = q_2$. Suponha por absurdo que $r_1 \neq r_2$, por exemplo $r_1 > r_2$, neste caso teríamos $0 < r_1 - r_2 = (q_2 - q_1).d$. Mas também $r_1 - r_2 < d$, pois $r_1 < d$ e $r_2 < d$, e daí segue que $0 < r_1 - r_2 = (q_2 - q_1).d < d$, o que é um absudo.

Exemplo 2:

Provar o seguinte enunciado: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall\, n \in N$

Demonstração: Vamos provar que o enunciado e verdadeiro usando a 1ª forma de indução. Primeiro vamos demonstrar que verdadeiro para n = 1.

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

$$1 = 1$$

Agora supondo que vale para $n = k$, vamos mostrar que vale para $n = k + 1$.

Hipótese de Indução: $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Adicionando k + 1 em ambos os lados temos:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Concluímos que o enunciado é verdadeiro para $n = k + 1$, portanto é verdadeiro $\forall\, n \in N$.

Exemplo 3:

(Indução – 1ª forma) Suponhamos que $\forall n \in N$ seja dada uma afirmação a(n) tal que :

(i) a(0) é verdadeira.

(ii) Para $k \in N$, a(k + 1) é verdadeiro sempre a(k) for verdadeira.

Então, a(n) é verdadeira $\forall n \in N$.

Demonstração: Seja S o conjunto dos números inteiros não negativos $m \in N$ tais que a(m) seja falsa, e suponhamos que S ≠ { }. Pelo princípio da boa ordenação[1], $\exists\ y_0 \in S$ tal que $y_0 \leq m, \forall\ m \in S$. Como a(0) é verdadeira, por hipótese temos que 0 $\notin$ S e portanto $y_0 \geq 1$; mas ainda como $y_0 - 1 \notin S$ temos que a($y_0 - 1$) é verdadeira. Agora pela hipótese (ii) segue que a(y_0) = a[(y_0 −1) + 1] é verdadeira o que é uma contradição. Logo S = { }.

Exemplo 4:

(Indução – 2ª forma) Suponhamos que $\forall n \in N$ seja dada uma afirmação a(n) tal que :

(i) a(0) é verdadeira.

(ii) Para cada inteiro m > 0, a(m) é verdadeira sempre que a(k) for verdadeira para $0 \leq k < m$.

Então, a(n) é verdadeira $\forall n \in N$.

Demonstração: Seja S o conjunto dos inteiros não negativos $m \in N$ tais que a(m) seja falsa e suponhamos que S ≠ { }. Como acima $\exists\ y_0 \in S$ tal que $y_0 \leq y, \forall\ y \in S$, e pela hipótese (i) $y_0 > 0$. Portanto, a(k) é verdadeira $\forall\ k$, $0 \leq k < y_0$ e (ii) nos da uma contradição.

1.2.3. Demonstração Direta

A prova direta é uma forma de mostrar que certa afirmação é verdadeira através de uma combinação de axiomas, definições e teoremas já estabelecidos por dedução lógica. Em cada passo, usa-se a implicação "Se p, então q" com p sendo verdadeiro. Chamamos p de hipótese e q de tese.

Se e somente se é uma forma de expressão para um teorema "Se p então q, e se q então

[1] Princípio de boa ordenação: todo subconjunto S de Z de elementos não negativos possui um primeiro elemento, isto é, $\exists\ y_0 \in$ S tal que $y_0 \leq$ y, $\forall y \in S$.

p” ou “p se e somente se q”. Para demonstrar um teorema dessa forma é necessário provar que p → q e que q → p, portanto p e q devem ser afirmações verdadeiras. Pode-se também demonstrar um teorema desse tipo usando sempre a condicional $p \Leftrightarrow q$ (p se e somente se q).

Dentro da demonstração direta também existe a demonstração por contraposição. Para provar que uma proposição condicional p → q basta provar que sua contrapositiva é verdadeira, ou seja, $\neg q \rightarrow \neg p$ (não q implica em não p) é verdadeira. Para isso supõe-se que $\neg q$ é verdadeira e mostra-se que $\neg p$ é verdadeira.

Exemplo 1:

(Teorema do Valor Médio)

Seja *f*: [a, b] → R contínua. Se *f* é derivável em (a, b), então existe c $\in$ (a, b) tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demonstração: Seja *g*(x) a função cujo gráfico é a reta que passa pelos pontos (a, *f*(a)) e (b, *f*(b)), isto é, $g(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}.(x - a) + f(a)$.

A função *h*(x) = *f*(x) – *g*(x) é contínua em [a, b] e derivável em (a, b) porque *f* e *g* são. Como além disso *h*(a) = *f*(a) – *g*(a) = 0 e *h*(b) = *f*(b) – *g*(b) = 0, temos *h*(a) = *h*(b), e *h* satisfaz as hipóteses do teorema de Rolle[2]. O teorema de Rolle garante então que existe um ponto c $\in$ (a, b) tal que *h’*(c) = 0, ou seja, *f’*(c) – *g’*(c) = 0, ou ainda *f’*(c) = *g’*(c).

Mas $g'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ para todo x e, assim, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Exemplo 2:

(Teorema Fundamental do Cálculo)

Seja *f*: [a, b] → R uma função integrável. Se F: [a, b] → R é uma primitiva[3] de *f*, então $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Demonstração: Seja $P = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b\}$ uma partição de [a, b]. Como F é derivável em {a, b], F é derivável em cada intervalo de P (e também contínua nesses intervalos), satisfazendo portanto as hipoteses do teorema do valor médio em cada intervalo

[2] Teorema de Rolle: Seja *f*: [a, b] → R contínua. Se *f* é derivável em (a, b) e *f*(a) = *f*(b), então existe c $\in$ (a, b) tal que *f’*(c) = 0.

[3] Dada uma função *f*: [a, b] → R, uma função F: [a, b] → R é uma primitiva de *f* se F’(x) = *f*(x) para todo x $\in$ [a,b].

de P. Então, pelo teorema do valor médio aplicado a cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, obtemos $c_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que $\frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = F'(c_i)$. Como $F'(c_i) = f(c_i)$, temos $F(t_i) - F(t_{i-1}) = f(c_i)(t_i - t_{i-1})$.

Consideremos a partição P pontilhada com os pontos c_1, c_2, ..., c_n aqui obtidos. Então

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(t_i - t_{i-1})$$
$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} (F(t_i) - F(t_{i-1}))$$
$$S_n(f) = F(b) - F(a)$$

Assim, $\lim_{n\to\infty} S_n(f) = F(b) - F(a)$. Como f é integrável, este limete independe da forma de pontilhar a Partição P. Portanto, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n(f) = F(b) - F(a)$.

Exemplo 3:

Proposição - Se a e b são números reais não negativos, então $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

Demonstração: Vamos provar em duas partes.

Parte 1: Se $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$.

Se $0 < a < b$, a propriedade $0 < a < b \ e\ 0 < c < d \Rightarrow ac < bd$ nos fornece imediatamente $a^2 < b^2$, e se $0 = a < b$, é também claro que $0 = a^2 < b^2$.

Parte 2: Se $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$.

Note que $a^2 < b^2 \Rightarrow b^2 - a^2 > 0 \Rightarrow (b+a)(b-a) > 0$. De $a, b \geq 0$ temos $a + b \geq 0$, e até mesmo $b + a > 0$, pois se fosse $a + b = 0$ teríamos $(b+a)(b-a) = 0$. Portanto, devemos ter também $b - a > 0$, ou seja, $a < b$, o que conclui a demonstração.

1.2.4. Demonstração por Construção

Uma prova por construção é uma demonstração de existência de certo objeto matemático através de uma construção geométrica.

Exemplo 1:

(Teorema de Pitágoras)

Provar que no triângulo retângulo a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Demonstração:

Seja um quadrado ABCD conforme a figura seguinte:

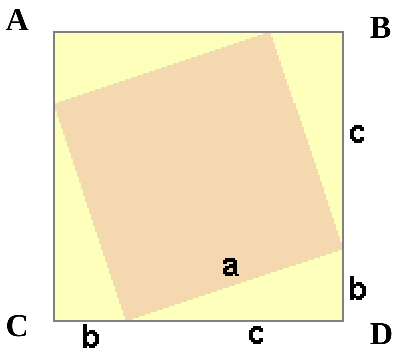


FIGURA 1

Observe que a área (S) do quadrado ABCD é igual à soma da área do quadrado central com as áreas dos quatro triângulos retângulos que lhe deram origem.

$$S = S_{quadrado} + 4 \cdot S_{triângulo}$$

Então:

$$S = a^2 + 4 \cdot \frac{bc}{2}$$

Logo:

$$S = a^2 + 2bc$$

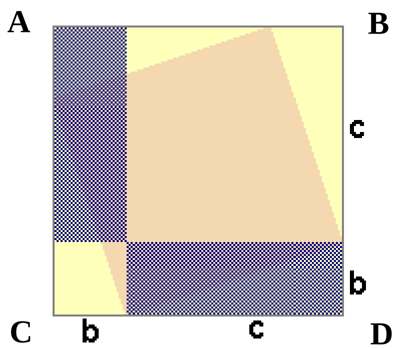


FIGURA 2

No caso da fig. 2 a área (S) é igual à soma das áreas dos dois retângulos com as áreas dos dois quadrados.

$$S = S_{quadrado} + 2 \cdot S_{retângulo} + S_{quadrado}$$

Assim temos:

$$S = c^2 + 2bc + b^2$$

Como a figura 1 é igual à figura 2 temos que:

$a^2 + 2bc = c^2 + 2bc + b^2$

Logo, $a^2 = c^2 + b^2$

Portanto a hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos catetos ao quadrado.

Exemplo 2:

(Teorema da Bissetriz Interna)

Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Demonstração: Seja um triângulo ABC e $\overline{AD}$ uma bissetriz interna (conforme figura 3), vamos mostrar que $\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$.

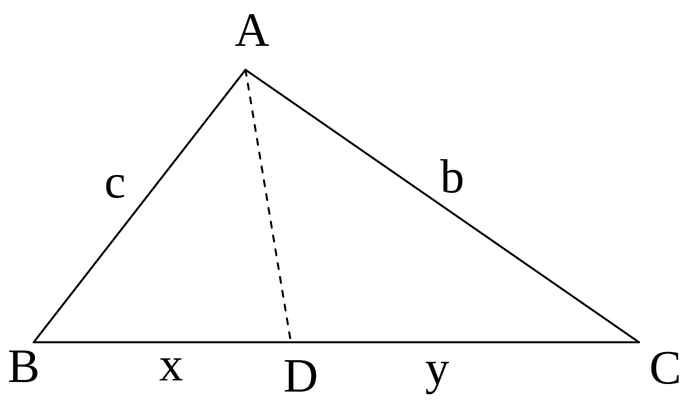


FIGURA 3

Construa por C uma paralela à bissetriz $\overline{AD}$, determinando um ponto E na reta $\overleftrightarrow{AB}$.

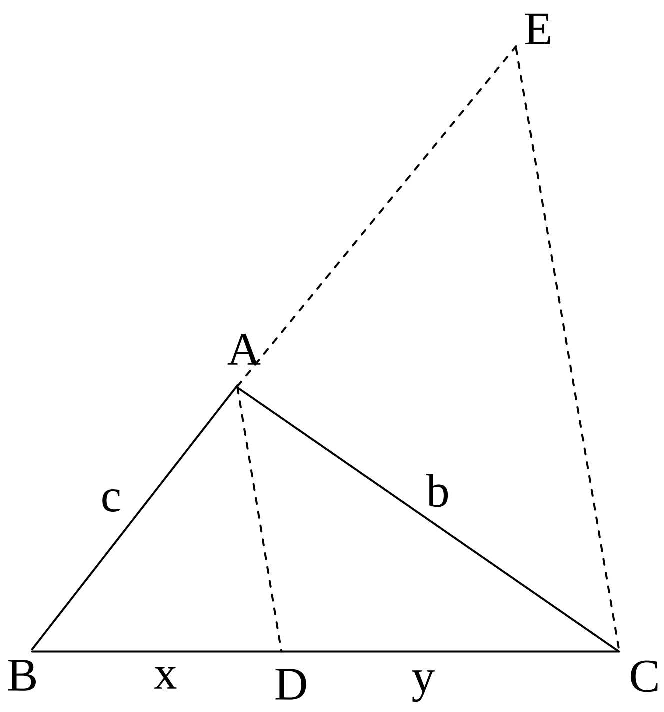


FIGURA 4

Como $\overleftrightarrow{CE} \,//\, \overleftrightarrow{AD}$, então o ângulo $B\hat{A}D \equiv A\hat{E}C$ (correspondentes) e $D\hat{A}C \equiv A\hat{C}E$ (alternos internos). Como por hipótese $B\hat{A}D \equiv D\hat{A}C$, pois $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$, então $A\hat{C}E \equiv A\hat{E}C$. Logo o triângulo ACE é isósceles de base $\overline{CE}$, assim $\overline{AE} \equiv \overline{AC}$, ou seja, AE = b.

Considerando $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ como transversais de um feixe de retas paralelas (identificado por $\overleftrightarrow{CE} \,//\, \overleftrightarrow{AD}$) e aplicando o Teorema de Tales, temos:

$\frac{x}{y} = \frac{c}{b}$, ou seja, $\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$.

1.2.5. Demonstração por Exaustão

Embora provar a falsidade por um contra-exemplo sempre funcione, provar por um exemplo quase nunca funciona. Uma exceção ocorre quando a conjectura é uma asserção sobre uma coleção finita. Nesse caso, a conjectura pode ser provada verificando-se que ela é verdadeira para cada elemento da coleção. Uma demonstração por exaustão significa que foram exauridos todos os casos possíveis.

Exemplo 1:

Prove que se um inteiro entre 1 e 20 é divisível por 6, então também é divisível por 3 .

Demonstração: Como existe apenas um número finito de casos, a hipótese pode ser provada simplesmente mostrando-se que é verdadeira para todos os inteiros entre 1 e 20 como mostra a tabela a seguir.

Número	**Divisível por 6**	**Divisível por 3**
1	não	
2	não	
3	não	
4	não	
5	não	
6	sim, 6 = 6.1	sim, 6 = 3.2
7	não	
8	não	
9	não	
10	não	
11	não	
12	sim, 12 = 6.2	sim, 12 = 3.4
13	não	
14	não	
15	não	
16	não	
17	não	
18	sim, 18 = 6.3	sim, 18 = 3.6
19	não	
20	não	

Assim, esgotado todas as possibilidades, temos que os números 6, 12 e 18 são divisíveis por 6 e também é divisível por 3. Logo todos os números inteiros entre 1 e 20 que são divisíveis por 6 são também divisíveis por 3.

Capítulo 2 – Demonstrações em Livros de Ensino Médio

Nos Livros didáticos do Ensino Médio, no Brasil, muito pouco se faz em termos de demonstrações. Menos ainda no saber realmente ensinado em sala de aula.

Vamos estudar os livros didáticos para ver com clareza tipos de demonstrações e áreas da matemática onde a demonstração se faz presente neste nível de ensino.

2.1. Demonstrações e o Ensino de Matemática

Polya (1987) ressalta que, a Matemática é uma boa escola para o raciocínio demonstrativo. Na verdade a Matemática tem quase o mesmo significado que o raciocínio demonstrativo, o qual está presente nas Ciências na medida em que os seus conceitos se elevam a um nível lógico- matemático suficientemente abstrato e definido. Abaixo deste alto nível, não há lugar para raciocínio verdadeiramente demonstrativo. Ainda assim os professores de Matemática devem colocar os seus alunos, salvo os das classes mais elementares, em contato com o raciocínio demonstrativo.

Ainda segundo Polya (1987) entre os dez mandamentos para professores de Matemática aprender a demonstrar é um deles. Os dez mandamentos são:

1. Tenha interesse por sua matéria.
2. Conheça sua matéria
3. Procure ler o semblante dos seus alunos; procure enxergar suas expectativas e suas dificuldades, ponha-se no lugar deles
4. Compreenda que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo.
5. Dê aos seus alunos não apenas informação, mas know-how, atitudes mentais, o hábito de trabalho metódico.
6. Faça-os aprender a dar palpites.
7. **Faça-os aprender a demonstrar.**
8. Busque, no problema que está abordando, aspectos que possam ser úteis nos problemas que virão — procure descobrir o modelo geral que está por trás da presente situação concreta.
9. Não desvende o segredo de uma vez — deixe os alunos darem palpites antes — deixe-os descobrir por si próprios, na medida do possível.
10. Sugira; não os faça engolir à força.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) ao final do ensino médio o aluno deve compreender que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações.

Nesse capítulo faremos o estudo de duas coleções de livros didáticos do ensino médio levando em conta a quantidade e o tipo das demonstrações, bem como o contexto em que são apresentadas. Os títulos a serem examinados são: Matemática Completa dos autores José Ruy Giovanni, José Ruy Giovanni Jr. e José Roberto Bonjorno, editado pela editora FTD no ano de 2002; e Matemática Volume Único do autor Manoel Paiva, editado pela Editora Moderna no ano de 2005. Estes livros foram escolhidos por serem utilizados em escolas da grande Florianópolis.

2.2. Estudo do Livro "Matemática Completa"

Este livro é divido em seis unidades: Álgebra, Porcentagem, Trigonometria, Geometria, Geometria Analítica e Noções de Estatística. Cada unidade é dividida em capítulos.

Como complemento, o livro apresenta as provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 1998, 1999, 2000, 2001 e 2002.

A primeira demonstração que o livro apresenta é no capítulo de Função Logarítmica (unidade Álgebra), no subcapítulo Mudança de Base. Neste momento, não é utilizado o termo *demonstração*, mas o desenvolvimento lógico empregado neste caso poderia ser enquadrado como uma demonstração direta. A seguir, apresentamos como o livro mostra a propriedade de mudança de base para logaritmos.

Dado $\log_a b$ *, vamos indicá-lo em outra base c* $(\log_c b)$.

Fazendo as substituições:

$$\begin{cases} \log_a b = x \Rightarrow b = a^x \\ \log_c b = y \Rightarrow b = c^y \end{cases} \therefore a^x = c^y$$

Tomando os logaritmos do 1º e do 2º membros de base c, temos:

$$\log_c a^x = \log_c c^y \Rightarrow x.\log_c a = y.\log_c c \Rightarrow$$
$$\log_a b.\log_c a = \log_c b.1 \Rightarrow \log_a b.\log_c a = \log_c b \therefore$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Essa expressão mostra como se efetua a mudança de um logaritmo de base a para um logaritmo de base c (arbitrária).

Ainda na unidade Álgebra, no capítulo de Progressão Aritmética, subcapítulo Fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética (P.A.). O autor utiliza o termo *demonstração* para deduzir a fórmula do termo geral de uma P.A., a mesma é apresentada no livro da seguinte maneira:

Seja a P.A. $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$ *de razão r.*

$a_1 = a_1 + 0r$

$a_2 = a_1 + 1r$

$a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r$

. .

. .

. .

$a_n = a_{n-1} + r = a_1 + (n - 1)r$

$an = a_1 + (n - 1)r$

Neste mesmo capítulo (Progressões Aritméticas) o autor apresenta a demonstração da Fórmula da soma dos n termos de uma P.A. No capítulo seguinte de Progressões Geométricas (P.G.) o livro expõe as demonstrações da fórmula do termo geral de uma P.G. e da fórmula da soma dos n termos de uma P.G. finita, todas são do tipo direta. Já para fórmula da soma dos termos de uma P.G. infinita não há demonstração.

No capítulo Binômio de Newton o autor apresenta um raciocínio para deduzir a fórmula do Binômio de Newton e a fórmula do termo geral de um Binômio de Newton, que pode ser considerado um procedimento. Vejamos como o livro apresenta a demonstração para a fórmula do Binômio de Newton.

Observe os seguintes desenvolvimentos para $(x + a)^n$*:*

Coeficientes dos termos do desenvolvimento

$n = 0 \rightarrow (x + a)^0 = 1$ $\qquad \binom{0}{0}$

$n = 1 \rightarrow (x + a)^1 = 1x + 1a$ $\qquad \binom{1}{0}\binom{1}{1}$

$n = 2 \rightarrow (x + a)^2 = 1x^2 + 2xa + 1a^2$ $\qquad \binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$

$n = 3 \rightarrow (x + a)^3 = 1x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + 1a^3$ $\qquad \binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$

.

.

.

$$n = n \rightarrow (x + a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}a^n x^0$$

Portanto, $(x + a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}ax^{n-1} + \binom{n}{2}a^2x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}a^n x^0$

Neste caso um desenvolvimento e dedução constituem a demonstração.

No capítulo Teoria das Probabilidades o autor prova que P(A) + P($\overline{A}$)[4] = 1, onde A e $\overline{A}$ são dois eventos de um espaço amostral U, sendo $\overline{A}$ o evento complementar de A. Há também a prova de que P($A \cup B$) = P(A) + P(B) – P($A \cap B$), onde A e B são eventos do mesmo espaço amostral U. Nessas provas o livro utiliza o termo *demonstração*, e as mesmas são do tipo direta.

No estudo dos Polinômios o livro expõe a demonstração do Teorema do Resto, ela é apresentada da seguinte maneira:

"O resto da divisão de um polinômio P(x) pelo binômio (ax + b) é igual a P(-b/a)."

Demonstração:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & ax + b \\ \cline{2-2} r & Q(x) \end{array}$$

Como o resto da divisão é independente de x, isto é, é igual a uma constante chamaremos R(x) de r.

Sabemos que P(x) = (ax + b).Q(x) + r.

[4] A probabilidade de ocorrer algum elemento do evento complementar de A é indicado por $P(\overline{A})$.

Se x for igual à raiz do divisor, isto é, x = $-\frac{b}{a}$*, vem:*

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = \left(a.\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right).Q\left(-\frac{b}{a}\right)+r$$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = (-b+b).Q\left(-\frac{b}{a}\right)+r$$

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = r$$

Ainda no estudo dos Polinômios, o autor enuncia o Teorema de D'Alembert[5] e o Teorema Fundamental da Álgebra[6], mas não apresenta demonstração, ele apenas admite a existência desses teoremas.

Na segunda unidade Porcentagem o livro não apresenta nenhuma demonstração, apenas definições, exemplos e exercícios.

Na unidade seguinte, Trigonometria, as primeiras demonstrações que aparecem são as do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos notáveis e da fórmula do comprimento de um arco de circunferência.

Ainda na unidade Trigonometria, no capítulo Relações Trigonométricas e Identidades Trigonométricas, há a demonstração da relação fundamental da trigonometria, essa prova é feita de forma direta. Neste capítulo o autor também ensina a demonstrar uma identidade trigonométrica da seguinte maneira:

Para provar que uma identidade trigonométrica é verdadeira, podemos utilizar ou aplicar qualquer uma das relações trigonométricas já estudadas e escolher um dos seguintes processos de demonstração:

1º Processo

Partimos de um membro da identidade (geralmente o mais complicado) e chegamos ao outro membro.

2º Processo

Vamos transformar o 1º membro da identidade, f(x), em uma função h(x) e, separadamente, transformar o 2º membro da identidade, g(x), também em uma função h(x), levando em consideração a propriedade:

---

[5] Um polinômio P(x) é divisível pelo binômio (ax + b) se, e somente se, $P\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.

[6] Toda equação algébrica P(x) = 0, de grau n $(n \geq 1)$, tem pelo menos uma raiz complexa.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = h(x) \\ g(x) = h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

São apresentadas no capítulo Transformações Trigonométricas as demonstrações da forma fatorada das expressões sen m + sen n, sen m – sen n, cos m + cos n e cos m – cos n, todas são demonstrações diretas.

No capítulo Resolução de Triângulo Quaisquer as demonstrações das Leis dos Senos e Cossenos são feitas por construção. Neste capítulo o autor também apresenta a prova por construção de que num triângulo qualquer, a área é igual ao semiproduto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo formado por esses lados.

Na unidade Geometria, no capítulo Área das Figuras Geométricas Planas, o livro apresenta as demonstrações por construção da área do paralelogramo, do triângulo, do losango e do trapézio. Nos capítulos de Geometria Espacial aparece também por construção as demonstrações da área lateral e área total do cilindro e do cone, as outras fórmulas são apenas enunciadas e consideradas como verdadeiras.

Na unidade Geometria Analítica, no primeiro capítulo, Introdução à Geometria Analítica Plana, é exposta as demonstrações por construção da fórmula da distância entre dois pontos no plano cartesiano e das coordenadas do ponto médio de um segmento. No capítulo dois, Estudando a Reta no Plano Cartesiano, o autor apresenta a demonstração de forma direta da equação geral da reta e da fórmula para calcular o ângulo formado por duas retas no plano cartesiano. Vejamos como a segunda aparece no livro.

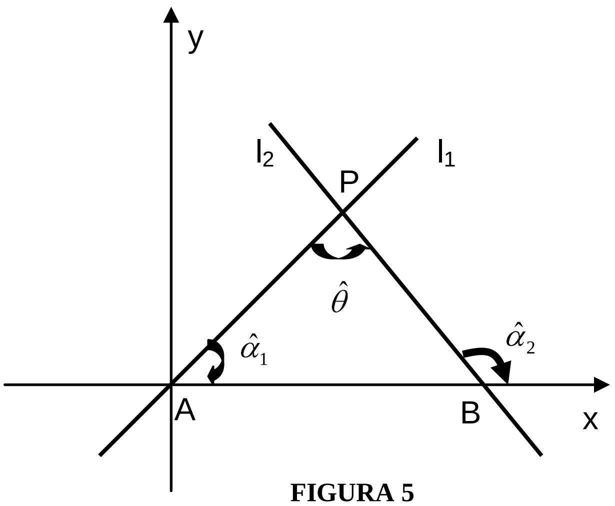


FIGURA 5

A figura nos mostra duas retas, l_1 e l_2, não perpendiculares, de coeficientes angulares m_1 e m_2, respectivamente.

O ângulo agudo $\hat{\theta}$, medido no sentido anti-horário, desde a reta l_1 até a reta l_2, é considerado o ângulo formado pelas restas l_1 e l_2.

No triângulo PAB, pela Geometria plana:

$$\hat{\alpha}_2 = \hat{\theta} + \hat{\alpha}_1$$

$$\hat{\theta} = \hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1$$

$$tg\hat{\theta} = tg(\hat{\alpha}_2 - \hat{\alpha}_1) \Rightarrow tg\hat{\theta} = \frac{tg\hat{\alpha}_2 - tg\hat{\alpha}_1}{1 + tg\hat{\alpha}_2 . tg\hat{\alpha}_1}$$

Como $tg\hat{\alpha}_2 = m_2$, $tg\hat{\alpha}_1 = m_1$ *e* $\hat{\theta}$ *é agudo, temos:* $tg\hat{\theta} = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 . m_1}$.

Na última unidade Noções de Estatística o autor não apresenta nenhuma demonstração, apenas definições, exemplos e exercícios.

Ao analisar o livro percebemos que o mesmo apresenta muitas mostrações, ou seja, da alguns exemplos com números e com isso conclui para o caso geral. Observe como ele expõe algumas das propriedades de logaritmos.

$$\left.\begin{array}{l} \log_2 1 = x \Leftrightarrow 1 = 2^x \Rightarrow 2^0 = 2^x \therefore x = 0 \\ \log_5 1 = x \Leftrightarrow 1 = 5^x \Rightarrow 5^0 = 5^x \therefore x = 0 \\ \log_a 1 = x \Leftrightarrow 1 = a^x \Rightarrow a^0 = a^x \therefore x = 0 \end{array}\right\} \log_a 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \log_2 2 = x \Leftrightarrow 2^1 = 2^x \Rightarrow \therefore x = 1 \\ \log_3 3 = x \Leftrightarrow 3^1 = 3^x \Rightarrow \therefore x = 1 \\ \log_a a = x \Leftrightarrow a^1 = a^x \Rightarrow \therefore x = 1 \end{array}\right\} \log_a a = 1$$

Nos exercícios propostos pelo livro, nas unidades Trigonometria e Geometria aparecem exercícios do tipo: mostre que, demonstre que ou prove que. Na unidade Trigonometria os mesmos são apresentados nos capítulos “Relações Trigonométricas e Identidades Trigonométricas” e “Transformações Trigonométricas”, totalizando nove exercícios. Na unidade Geometria aparece um exercício no capítulo “Estudo da Pirâmide”.

A seguir listaremos esses exercícios.

I. *Demonstre que as seguintes identidades trigonométricas, ficando o processo a sua livre escolha.*

   a) $\sec x . \cos x = 1$

   b) $\cot gx . senx = \cos x$

   c) $\dfrac{2 - sen^2 x}{\cos^2 x} - tg^2 x = 2$

   d) $\cot g^2 x + 1 = \cos ec^2 x$

e) $(1+tg^2x)(1-sen^2x)=1$

f) $tg^2x+\cos^2x=\sec^2x-sen^2x$

g) $\dfrac{tgx}{1+tg^2x}=\dfrac{senx}{\sec x}$

II. *Mostre que* $tg\,x.\cos x.\cos ec\,x=1$.

III. *Demonstre que:*

(cos a + cos b)(cos a – cos b) + (sen a – sen b)(sen a + sen b) = 0.

IV. *Mostre que (sen x +tg x)(cos x + cotg x) = (1 + sen x)(1 + cos x).*

V. *Demonstre que tg x. sen 2x =* $2sen^2\,x$.

VI. *Fazendo 3a = 2a + a, demonstre que sen 3a =* $3sen\,a-4sen^3\,a$.

VII. *Demonstre que 1 + tg a . tg 2a = sec 2a.*

VIII. *Demonstre a identidade* $\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]=sen\,x.sen\,y$.

IX. *Mostre que* $sen(30°+\alpha)+\cos(60°+\alpha)=\cos\alpha$.

X. *Uma pirâmide e um prisma têm a mesma base. A altura da pirâmide vale o sêxtuplo da altura do prisma. Sendo* V_1 *o volume da pirâmide e* V_2 *o volume do prisma, mostre que* $V_1 = V_2$.

2.3. Estudo do Livro “Matemática Volume Único”

Este livro é divido em trinta e quatro capítulos, e cada capítulo é dividido em subcapítulos.

No primeiro capítulo Uma Introdução à Linguagem dos Conjuntos, o autor já apresenta uma demonstração por absurdo. Neste momento não é usado o termo *demonstração*, e sim justificativa. Abaixo vamos descrever como a mesma é apresentada no livro.

Propriedade: O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

$\emptyset \subset A\ (\forall A)$ *(O símbolo* $\forall$ *é lido “qualquer que seja”.)*

Pode-se justificar essa propriedade a partir das duas únicas possibilidades: ou $\emptyset \not\subset A$ *ou* $\emptyset \subset A$ *. Analisemos a primeira delas: se* $\emptyset \not\subset A$ *, então existe pelo menos um elemento que pertence ao vazio e não pertence a A; mas isso é* ***absurdo,*** *pois o vazio não possui elemento algum. Assim, é falso que* $\emptyset \not\subset A$ *, portanto é verdade que* $\emptyset \subset A$ *.*

No capítulo dois, Temas Básicos de Álgebra e de Matemática Financeira, aparece um raciocínio para deduzir a fórmula para o cálculo do montante com juro composto, que apesar de não aparecer o termo *demonstração*, envolve um raciocínio lógico que poderia ser considerada uma demonstração direta. No capítulo seguinte, Geometria Plana: triângulos e proporcionalidade, é exposto a demonstração por construção da soma dos ângulos internos de um triângulo e a demonstração de forma direta do teorema do ângulo externo de um triângulo[7].

Ainda no capítulo Geometria Plana, no subcapítulo Semelhança de Triângulos, pela primeira vez o autor utiliza o termo *demonstração* para provar que a razão entre alturas correspondentes é igual à razão de semelhança de dois triângulos. No subcapítulo seguinte é apresentada a demonstração das relações métricas no triângulo retângulo. Vejamos como ela é exposta.

Vamos demonstrar as seguintes relações métricas:

$ah = bc \qquad ch = bn \qquad a^2 = b^2 + c^2 \,(teorema\ de\ Pitágoras)$

$c^2 = an \qquad bh = cm$

$b^2 = am \qquad h^2 = mn$

Demonstrações

O triângulo retângulo ABC pode ser separado em três triângulos semelhantes entre si.

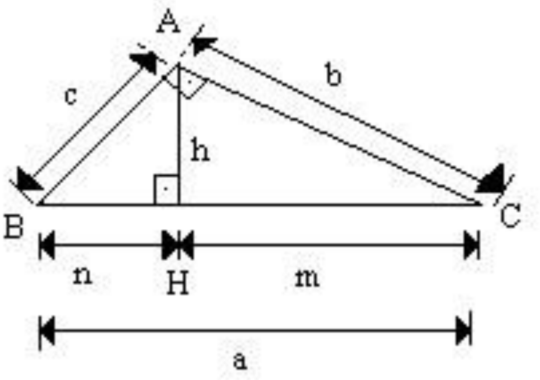


FIGURA 6

Assim, temos:

Triângulo ABC semelhante ao triângulo HBA $\Leftrightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{h} = \dfrac{c}{n}$

Logo: $ah = bc \qquad c^2 = an \qquad ch = bn$

Triângulo ABC semelhante ao triângulo HAC $\Leftrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{m} = \dfrac{c}{h}$

Logo: $b^2 = am \qquad ah = bc \qquad bh = cm$

[7] A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não-adjacentes a ele.

Triângulo HBA semelhante ao triângulo HAC $\Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{h}{m} = \frac{n}{h}$

Logo: $bh = cm \qquad ch = bn \qquad h^2 = mn$

Para demonstrar o teorema de Pitágoras, basta adicionar, membro a membro, as relações $b^2 = an$ *e* $c^2 = am$ *, obtendo:*

$b^2 + c^2 = an + am \Rightarrow b^2 + c^2 = a(n + m)$

Como n + m = a, concluímos que: $a^2 = b^2 + c^2$.

No quarto capítulo, Geometria Plana: circunferência, círculo e cálculo de áreas, aparecem às demonstrações de forma direta das seguintes propriedades de circunferências:

- Em uma circunferência, o segmento de reta que liga o centro C ao ponto médio de uma corda é perpendicular a essa corda.
- Em uma circunferência, o segmento de reta que liga o centro C a uma corda, perpendicularmente, encontra esta corda no ponto médio.
- A medida de um ângulo inscrito é metade da medida do ângulo central correspondente.

Ainda neste capítulo o autor apresenta as demonstrações por construção das fórmulas de cálculo de área do paralelogramo, triângulo, hexágono regular, trapézio, losango.

Nos cinco capítulos seguintes, Função Real de Variável Real e Inversão de Funções, Função Polinomial do 1º grau ou Função Afim, Função Polinomial do 2º grau ou Função Quadrática, Função Modular, Função Exponencial, o livro não apresenta nenhuma demonstração, apenas definições, exemplos e exercícios.

No capítulo onze, Função Logarítmica, são demonstradas de forma direta todas as propriedades dos logaritmos.

No capítulo seguinte, Seqüências, aparecem às demonstrações das seguintes propriedades:

- Uma seqüência de três termos é Progressão Aritmética (P.A.), se e somente se, o termo médio é igual à média aritmética entre os outros dois.
- Numa Progressão Aritmética finita, a soma de dois termos eqüidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.
- Uma seqüência de três termos, em que o primeiro é diferente de zero, é Progressão Geométrica (P.G.) se, e somente se, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos outros dois.

São apresentadas também as demonstrações das fórmulas do termo geral da P.A. e da P.G., da soma dos n primeiros termos de uma P.A. e P.G. e da soma dos infinitos termos de uma P.G..

O próximo capítulo que apresenta demonstrações é o quatorze, Trigonometria no Triângulo Retângulo, abaixo vamos descrever as mesmas.

Teorema

Dado um ângulo agudo de medida α *, tem-se:* $tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$

Demonstração

Construindo um ângulo agudo de medida α *e traçando uma perpendicular a um dos lados do ângulo, temos:*

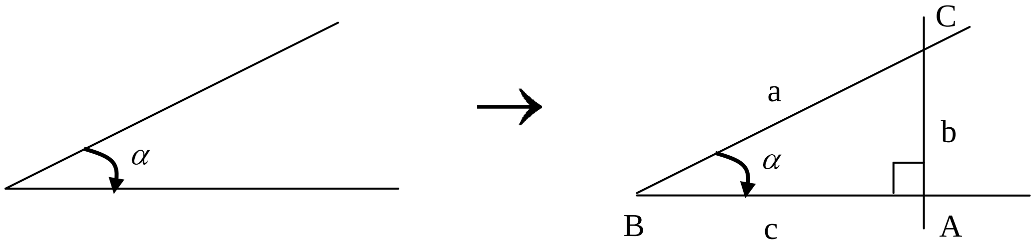


FIGURA 7

Calculando $sen\alpha$ e $\cos\alpha$, *e efetuando* $\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$, *concluímos que :*

$$\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = tg\alpha\ .$$

Teorema

Se α *é a medida de um ângulo agudo, então:* $sen\alpha = cos\,(90^\circ - \alpha)$ *e* $\cos\alpha = sen\,(90^\circ - \alpha)$.

Demonstração

Construindo um ângulo agudo de medida α *e traçando uma perpendicular a um dos lados do ângulo, temos:*

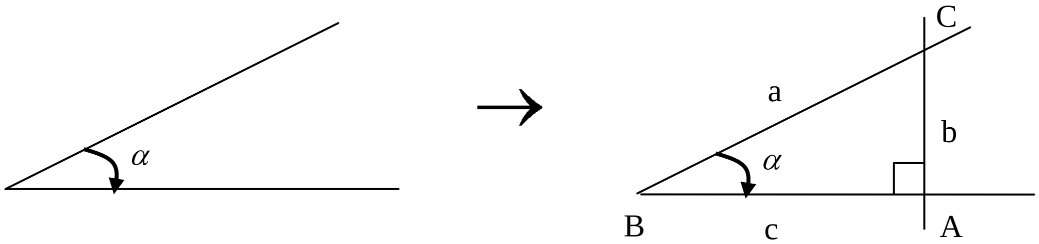


FIGURA 8

Observe que o ângulo $\hat{C}$ é o complementar de $\hat{B}$, pois:

$\alpha + med(\hat{C}) = 90° \Rightarrow med(\hat{C}) = 90° - \alpha$

Assim, temos:

$$\left.\begin{aligned} sen\alpha &= \frac{b}{a} \\ \cos(90° - \alpha) &= \frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow sen\alpha = \cos(90° - \alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{c}{a} \\ sen(90° - \alpha) &= \frac{c}{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = sen(90° - \alpha)$$

Provamos que: se dois ângulos são complementares, então o seno de um deles é igual ao cosseno do outro.

Ainda no capítulo quatorze aparecem as demonstrações do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos notáveis. No capítulo seguinte, A Circunferência Trigonométrica e as Extensões dos Conceitos de Seno e de Cosseno, o autor apresenta a demonstração, que se enquadra no tipo direta, da Relação Fundamental da Trigonometria.

No capítulo dezesseis, o livro expõe a demonstração do teorema: se $\cos\alpha \neq 0$, então $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$. No estudo do triângulo retângulo o autor já havia apresentado que a tangente de um ângulo agudo pode ser obtida como a razão de seno pelo cosseno desse ângulo, neste capítulo ele generaliza para qualquer arco trigonométrico de medida α.

No capítulo seguinte, Adição de Arcos e Arco Duplo, aparecem às demonstrações das fórmulas de adição de arcos, e seno, cosseno e tangente de arco duplo. No capítulo dezoito, Funções Trigonométricas e Resolução de Triângulos, o autor apresenta a prova da lei dos senos, dos cossenos e do seguinte teorema:

“A área A de um triângulo MNP, em que NM = a, NP = b e m $(M\hat{N}P)=\alpha$, é dada por: $A=\frac{1}{2}ab.sen\alpha$”

Nos seis capítulos seguintes, Matrizes, Sistemas Lineares, O Conceito de Determinante e Aplicações, Os princípios da Análise Combinatória, Agrupamento e Métodos de Contagem, Geometria de Posição e Poliedros, não aparecem nenhuma demonstração.

No capítulo vinte e cinco, Prisma e Pirâmide, são apresentadas as demonstrações de duas Propriedades de Pirâmide, que são elas:

- A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.
- Duas pirâmides triangulares de mesma altura e bases de mesma área têm o mesmo volume.

Para deduzir a fórmula do volume da pirâmide o autor apresenta um raciocínio lógico, mas não utiliza o termo *demonstração.*

No estudo dos corpos redondos aparece um raciocínio lógico que pode ser considerado demonstração para as fórmulas da área lateral, área total e volume de cilindro circular, área lateral, área total, e volume de cone circular e volume da esfera.

No capítulo vinte e sete, Probabilidade, são expostas as propriedades das probabilidades e suas justificativas, abaixo vamos descrevê-las.

Sendo E um espaço amostral eqüiprovável, finito e não-vazio, e A um evento de E, têm-se:

P.1 $P(\emptyset)=0$

Justificativa: $P(\emptyset)=\frac{n(\emptyset)}{n(E)}=\frac{0}{n(E)}=0$

P.2 $P(E)=1$

Justificativa: $P(E)=\frac{n(E)}{n(E)}=1$

P.3 $0\le P(A)\le 1$

Justificativa: $\emptyset\subset A\subset E\Rightarrow n(\emptyset)\le n(A)\le n(E)\Rightarrow \frac{n(\emptyset)}{n(E)}\le\frac{n(A)}{n(E)}\le\frac{n(E)}{n(E)}\Rightarrow 0\le P(A)\le 1$

P.4 Sendo $\overline{A}$ *o conjunto dos elementos de E que não pertencem a A, tem-se:* $P(A)+P(\overline{A})=1$

Justificativa: Como $A \cup \overline{A} = E$ *e* $A \cap \overline{A} = \emptyset$ *, tem-se:* $n(A) + n(\overline{A}) = n(E) \Rightarrow \frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(\overline{A})}{n(E)} = \frac{n(E)}{n(E)} \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1$

O evento $\overline{A}$ *é chamado de* ***complementar*** *de A. Se o evento A é determinado por uma propriedade p, então* $\overline{A}$ *é determinado pela propriedade ~p (lê-se: não p), isto é, a negação de p.*

Também são apresentadas as justificativas da adição de probabilidades $\left(P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(E)} \right)$, probabilidade condicional $\left(P(B/A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \right)$ e multiplicação de probabilidades $(P(A \cap B) = P(A).P(B))$.

No estudo de Geometria Analítica o autor apresenta a demonstração do teorema "Se *r* é a reta não-vertical que passa pelo ponto P(x_0, y_0) e tem coeficiente angular *m*, então uma equação de *r* é $y - y_0 = m(x - x_0)$, denominada equação fundamental da reta."

Apresenta também a prova de que duas retas *r* e *s* não-verticais são perpendiculares se, e somente se, o coeficiente angular de uma delas é igual ao oposto do inverso do coeficiente angular da outra.

No capítulo trinta e dois, O conjunto dos Números Complexos, aparece à demonstração do seguinte teorema:

Existem quatro, e somente quatro, valores para potências de i com expoentes inteiros. São eles: $i^0 = 1 \quad i^1 = i \quad i^2 = -1 \quad i^3 = -i$

Demonstração

Calculemos a potência i^n*, com n inteiro.*

Primeira Parte: $n \geq 4$

Dividindo n por 4, obtemos um quociente inteiro q e um resto r, sendo r inteiro e $0 \leq r < 4$*, isto é, n = 4q + r. Assim, temos:*

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q}.i^r = (i^4)^q.i^r = 1^q.i^r = 1.i^r = i^r$$

Como r é inteiro e $0 \leq r < 4$ *, temos que* i^n *é um dos quatro valores:* $i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1$ *ou* $i^3 = -i$.

Segunda Parte: $n < 0$

Temos: $i^n = (i^{-1})^{-n}$

Note que $i^{-1}\frac{1}{i}$ *. Multiplicamos o numerador e o denominador dessa fração por – i:* $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1.(-i)}{i.(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i$.

Assim, temos: $i^n = (-i)^{-n} = (-1)^{-n}.i^{-n}$.

Como $n < 0$ *, então* $-n > 0$ *; logo* i^{-n} *é um dos quatro valores:* $i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1$ *ou* $i^3 = -i$ *, e, portanto,* $(-1)^{-n}.i^{-n}$ *também assume esses quatro valores.*

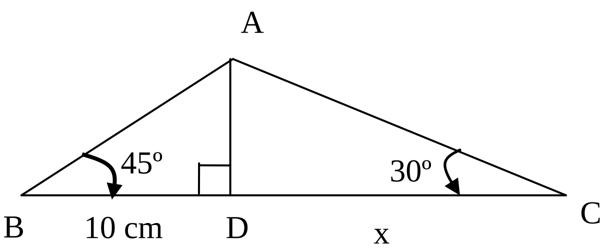
No estudo dos Polinômios o livro apresenta a demonstração de forma direta do Teorema do Resto, do Teorema de D'Alembert e do Teorema da Decomposição[8], já o Teorema Fundamental da Álgebra é apenas enunciada, mas o autor explica que a demonstração do mesmo foi a tese de doutoramento do matemático alemã Carl Friedrich Gauss, apresentada em 1978.

Nos exercícios propostos pelo livro apenas cinco são do tipo mostre que, prove que ou demonstre que, os mesmos aparecem nos capítulos: Uma Introdução à Linguagem dos Conjuntos, Trigonometria no Triângulo Retângulo, Conjunto dos Números Complexos e Equações Polinomiais.

Abaixo listaremos esses exercícios.

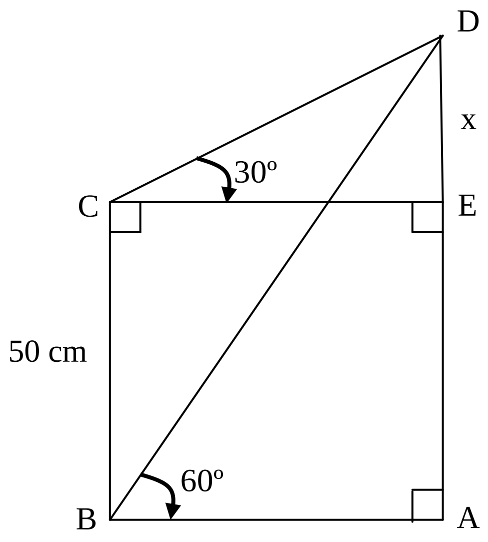
I. *Prove que o produto de um número par qualquer por um número ímpar qualquer é um número par.*

II. *Prove que o triângulo ABD é isósceles, depois calcule a medida de x na figura:*



III. *Prove que o triângulo BCD é isósceles, depois calcule a medida x do segmento DE na figura:*

[8] Todo polinômio de grau n, com $n \geq 1$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ pode ser fatorado sob a forma $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \cdot ... \cdot (x - r_n)$. Em que $r_1, r_2, ..., r_n$ são todas as raízes de P(x).



IV. *Demonstre que o conjugado da soma de dois números complexos é igual à soma dos conjugados desses complexos.*

V. *Mostre que:*

a) *5 é raiz dupla da equação*

$x^6 - 10x^{54} + 25x^4 + x^2 - 10x + 25 = 0$

b) *2 é raiz tripla da equação*

$x^5 - 6x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$

2.4. Comparação entre os livros “Matemática Completa” e “Matemática Volume Único”

Abaixo faremos uma tabela com a quantidade e o tipo de demonstrações que cada livro apresenta na parte de desenvolvimento de conteúdo. Nessa tabela estamos considerando também os raciocínios lógicos, que apesar de não utilizarem o termo *demonstração*, podem ser considerados como provas.

Tipos de Demonstração	“Matemática Completa”	“Matemática Volume Único”
Direta	18	40
Indução		
Absurdo		1
Construção	14	17

Exaustão		
Total	32	58

Ao analisar a tabela percebemos que no livro “Matemática Volume Único” apresenta dezoito demonstrações diretas e quatorze demonstrações por construção. Já no livro “Matemática Volume Único” aparecem quarenta demonstrações diretas, dezessete demonstrações por construção e uma demonstração por absurdo. Assim, o segundo livro apresenta um número maior de provas.

No livro “Matemática Completa” as demonstrações aparecem no estudo de Função Logarítmica, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Binômio de Newton, Teoria das Probabilidades, Polinômios, Trigonometria, Áreas das Figuras Geométricas Planas, Cone, Geometria Analítica (Equação Geral da Reta e Ângulo Formado por Duas Retas).

Já no livro “Matemática Volume Único” as provas aparecem no estudo dos Conjuntos, Juro Composto, Geometria Plana (Triângulo, Circunferência e Área de Figuras Planas), Função Logarítmica, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Trigonometria, Geometria Espacial (Prisma, Pirâmide, Cilindro, Cone e Esfera), Teoria das Probabilidades, Geometria Analítica (Equação Fundamental da Reta), Números Complexos e Polinômios.

Abaixo faremos uma tabela comparando a quantidade de exercícios que cada livro apresenta envolvendo demonstrações.

	“Matemática Completa”	“Matemática Volume Único”
Exercícios do tipo: Mostre que, Prove que ou Demonstre que.	10	5

Ao analisar a tabela concluímos que no livro “Matemática Completa” aparece dez exercícios envolvendo demonstrações e no livro “Matemática Volume Único” aparece cinco exercícios desse tipo.

No livro “Matemática Completa” esses exercícios aparecem no estudo de Trigonometria (Relações Trigonométricas, Identidades Trigonométricas e Transformações Trigonométricas) e Geometria (Pirâmides). No Livro “Matemática Volume Único” os exercícios são propostos no estudo dos Conjuntos, Trigonometria no Triângulo Retângulo, Números Complexos e Equações Polinomiais.

Considerações Finais

Ao final desse estudo podemos perceber que nos dois livros, Matemática Completa e Matemática Volume Único, os tipos de demonstrações que aparecem nos mesmos é por construção e direta, a não ser por uma demonstração por absurdo que é apresentada no livro Matemática Volume Único.

As demonstrações são escritas de forma clara, fazem uso da linguagem e de objetos matemáticos.

Nos dois livros analisados no estudo das Funções (Função Afim, Quadrática, Modular e Exponencial), Estatística, Matrizes, Determinante e Sistemas Lineares não são apresentados nenhuma demonstração. No livro Matemática Completa acontece o mesmo também no estudo da Teoria dos Conjuntos, dos Números Complexos e Porcentagem.

Nos exercícios do tipo mostre que, prove que ou demonstra que os dois livros estudados apresentam uma quantidade pequena, sendo dez no livro Matemática Completa e cinco no livro Matemática Volume Único.

As demonstrações nos livros didáticos apesar de poucas, aparecem no estudo de: Função Logarítmica, Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Binômio de Newton, Teoria das Probabilidades, Polinômios, Trigonometria, Áreas das Figuras Geométricas Planas, Cone, Geometria Analítica (Equação Geral da Reta e Ângulo Formado por Duas Retas), Conjuntos, Juro Composto, Trigonometria, Geometria Espacial (Prisma, Pirâmide, Cilindro, Cone e Esfera), Teoria das Probabilidades e Números Complexos.

Cabe ainda perguntar, e em sala de aula, será que estas demonstrações são realmente trabalhadas? O que se faz de demonstração no Ensino Médio?

Para responder estas questões, uma observação em sala de aula é necessária.

Referências Bibliográficas

DOLCE, O.; POMPEO, J. N.. **Fundamentos de Matemática Elementar, 9: Geometria Plana.** 7ª Ed. São Paulo. Editora Atual, 1993.

FUCHS, W. R.. **A Matemática Moderna.** Trad. Marianne Arnsdorff e José Manasterski. São Paulo. Editora Polígono, 1970.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI Jr., J. R.. **Matemática Completa:** ensino médio, volume único. São Paulo. Editora FTD, 2002.

GONÇALVES, A.. **Introdução à Álgebra.** Rio de Janeiro. Impa.

KUHLKAMP, N.. **Cálculo 1.** 2ª Ed. Florianópolis. Editora da UFSC, 2001.

LIMA, E. L.. **O Princípio da Indução.** Revista Eureka, Rio de Janeiro, n. 3, p. 26-43, out. 1998.

MACHADO, N. J.. **Matemática e Língua Materna:** Análise de uma impregnação mútua. 3ª Ed. São Paulo. Cortez Editora, 1993.

MANOEL, P.. **Matemática, volume único.** 1º Ed. São Paulo. Editora Moderna, 2005.

MOLES, A.. **A criação científica.** São Paulo. Perspectiva, 1981.

POINCARÉ, H.. **A Ciência e a Hipótese.** Trad. Maria Auxiliadora Kneipp. 2ª Ed. Brasília. Editora Universidade de Brasília, 1988.

POLYA, G.. **A Arte de Resolver Problemas:** um novo aspecto do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro. Editora Interciência, 1995.

POLYA, G.. **Dez mandamentos para professores**. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 10, p. 02-10, jan. 1987.