

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

Os Aspectos Físicos e Matemáticos da Música
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Rodrigo Luiz de Souza

Florianópolis, novembro de 2008

Rodrigo Luiz de Souza


Aspectos Físicos e Matemáticos da Música

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura
- do Departamento de Matemática do Centro de
Ciências Físicas e Matemáticas da Universidade
Federal de Santa Catarina.


Orientador: Ms. Tarso Fernando Cassol

Florianópolis, fevereiro de 2009

Esta monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 09/CCM/2009.


Prof. Carmen Suzane Comitre Gimenez
Professora responsável pela disciplina

Banca Examinadora:


Prof. Tarso Fernando Cassol
Orientador


Prof. Danilo Royer


Prof. André Luiz Melo

Florianópolis, 16 fevereiro de 2009.

*“A música é um exercício
oculto de aritmética de uma
alma inconsciente que lida
com números.”*

G. W. Leibniz

Agradecimentos

Agradeço a todos aqueles que fizeram possível a elaboração deste trabalho. Aos meus pais, Marcio Luiz de Souza e Adelair Sardá de Souza; e ao meu irmão Luiz Fellippe de Souza pelo apoio prestado durante todos os anos de minha vida. À minha namorada Thiane Pereira Poncetta Coliboro, pela mão sempre estendida, pelo amor dedicado e por todos os bons momentos que tivemos e, ainda mais, pelos que virão. Aos maestros Almir José da Silva e Luiz Fernando da Costa, por terem me iniciado no fabuloso mundo da Música. A todos os professores que contribuíram para a minha formação e em especial aos professores Tarso Fernando Cassol que se dispôs a orientar esta pesquisa; e Danilo Royer, pelas dicas valorosas para a elaboração deste trabalho.

Agradeço a todos aqueles que me ajudaram em minha formação acadêmica, mas, principalmente em minha formação pessoal e que a memória (ou a falta dela) não permitiu citar os nomes nesta nota. A todos vocês muito obrigado.

Apresentação

Este é o trabalho de Conclusão de Curso previsto no currículo do curso de Matemática - Habilitação Licenciatura - da Universidade Federal de Santa Catarina, elaborado sob orientação do professor Tarso Fernando Cassol, que tem por objetivo uma abordagem introdutória da Música sob seus aspectos Físicos e Matemáticos.

Nos capítulos 1 e 2 estão expostos alguns conceitos de física ondulatória que, a princípio, não requerem grandes conhecimentos musicais. Os assuntos abordados nestes dois primeiros capítulos são fundamentais ao se tratar da série harmônica, foco das discussões no capítulo 3 e que culmina na construção das escalas nos modos Pitagórico e Temperado

Ao leitor que não possui muitos conhecimentos acerca da Teoria Musical recomenda-se fortemente a leitura do Apêndice A.1 antes de iniciar a leitura do capítulo 3.

Sumário

Sumário	ii
Introdução	1
1 Ondas e Sons	5
1.1 Ondas Mecânicas	5
1.2 Tipos de Ondas	6
1.3 Ondas Progressivas	7
1.4 Ondas Senoidais	9
1.5 Ondas Sonoras e Ondas Senoidais	12
1.6 Leis de Mersenne	18
2 Ondas Estacionárias	21
2.1 Superposição	21
2.2 Ondas Complexas e Séries de Fourier	22
2.3 Ondas Estacionárias	27
2.4 Ressonância e a Série Harmônica	30
3 Escalas Musicais	36
3.1 A influência Matemática na Concepção das Escalas Musicais	36
3.2 A Escala Pitagórica	37
3.3 A Escala Temperada	45
A Apêndice	48
A.1 Conceitos Básicos de Teoria Musical	48

Conclusão	51
Referências Bibliográficas	52

Introdução

Desde tempos remotos, a construção de termos musicais, perpassa os meandros da Matemática e da Física. De acordo com T. H. Garland e C. V. Kahn, em *Math and Music Harmonious Connections* (1995), já na Grécia antiga a música era tida como uma fonte de interesse científico e instigava muito a curiosidade dos sábios da época. Pitágoras, conhecido pelo seu famoso teorema sobre os triângulos retângulos é também importante quando se fala da história da música. Foi ele quem desenvolveu os primeiros esforços no sentido de estudar as propriedades do som, embora não tenha levado muito em consideração suas propriedades físicas, fez conhecimentos valiosos acerca dos padrões matemáticos envolvidos entre cordas de comprimentos diferentes e os sons que produziam.

Pitágoras fundou uma sociedade secreta que foi responsável por várias descobertas nos campos do conhecimento humano e teve vários seguidores. Um dos pitagóricos mais brilhantes, Arquitas¹, que escreveu sobre a geometria espacial e trabalhou exaustivamente no problema da duplicação do cubo, tem sob sua autoria um tratado intitulado “Da Música” e foi um dos primeiros, em uma longa lista de matemáticos que escreveram sobre a teoria matemática da música. Nicômaco (60 – 120 d.C), conhecido como um neo-pitagórico, produziu documentos importantes para o estudo científico da Música, como “Introdução à Música” e “Um Manual de Harmonia”,

¹Arquitas de Tarento (428 a.C. - 347 a.C.), filósofo e cientista grego, considerado o mais ilustre dos matemáticos pitagóricos. Fundou a mecânica e influenciou Euclides. Foi o primeiro a restringir as matemáticas às disciplinas técnicas como a geometria, aritmética, astronomia e acústica.

Embora inúmeras obras sobre mecânica e geometria lhe sejam atribuídas, restaram apenas fragmentos cuja preocupação central é a Matemática e a Música.

e, em suas obras, trata da importância da razão que Pitágoras descobriu entre os números inteiros para a teoria musical.

Ptolomeu², talvez um dos mais importantes astrônomos e geógrafos do período helenístico, fez grandes descobertas na astronomia, dentre elas a teoria de que a Terra seria o centro do Universo perdurou até a Idade Média, é também citado como um dos grandes estudiosos da teoria matemática da música. Em sua obra “*Harmonica*” fez referência à subjetividade de percepção da música e destacou, a exemplo de Nicômaco, a importância das relações entre os números inteiros descobertas por Pitágoras para o estudo dos intervalos musicais. Durante a Idade Média (c. 500 -1500) houve uma carência de desenvolvimento científico e não foi diferente nos ramos de estudo da Matemática e da Música, mas mesmo assim vários matemáticos focaram a sua curiosidade nas ligações entre estas duas áreas é o que afirmam T. H. Garland e C. V. Kahn, em *Math and Music Harmonious Connections* (1995). Neste período, seguindo uma divisão proposta por Pitágoras já na Grécia Antiga, as principais disciplinas que os acadêmicos da idade média se ocupavam em estudar, nos claustros universitários, eram a Medicina, o Direito, a Teologia, além dos conjuntos chamados trivium – Retórica, Gramática e Dialética – e quadrivium (ou quadrivium) – Matemática, Geografia, Música e Astronomia, como afirma J. F. Rodrigues em seu artigo *A Matemática e A Música* (1999). Johannes Kepler³(1571 - 1630), astrônomo alemão, reformulou a teoria da música das esferas desenvolvida pelos gregos, segundo a qual, os planetas produziam diferentes sons de acordo com a sua velocidade, sua órbita e sua distância até o Sol. Ele acreditava que se a massa e a velocidade de um objeto que gira fosse conhecida era possível, teoricamente, calcular

²Ptolomeu (83 – 161 d.C(?)) foi um cientista grego que viveu durante o período helenista, provavelmente em Alexandria, na então província romana do Egito. Ele é reconhecido pelos seus trabalhos em matemática, astrologia, astronomia, geografia e cartografia. Realizou também trabalhos importantes em óptica e teoria musical. A sua obra mais conhecida é o *Almagesto*, um tratado de astronomia.

³Johannes Kepler (1571 - 1630) foi um astrônomo. Formulou as três leis fundamentais da mecânica celeste, conhecidas como leis de Kepler. Dedicou-se também ao estudo da óptica.

a altura do som fundamental produzido por este objeto. Kepler acreditava tanto em sua teoria que descobriu algumas das notas que, eram emitidas pelo planetas conhecidos naquela época. Outros matemáticos muito conhecidos na atualidade, como Marin Mersenne⁴ (1588 - 1648), ou mesmo Galileu contribuíram para o estudo científico da música, no entanto, não chegaram a causar grande impacto no que se sabia sobre a matemática da música até então, embora os estudos de Mersenne tenham uma importância fundamental quando se fala dos aspectos físicos do som. Ele formulou leis importantes sobre cordas vibrantes que hoje são conhecidas como “Leis de Mersenne” e altamente empregadas na construção de instrumentos musicais.

O estudo analítico da música só veio a ter novamente um grande impulso quando os músicos e matemáticos puseram-se a estudar meios de criar uma escala onde os intervalos fossem igualmente espaçados, isso pois com o sistema pitagórico ou mesmo com outros sistemas criados até então, chamados naturais, uma música só podia ser tocada na tonalidade em que fosse originalmente composta, pois, devido a irregularidades entre os graus das escalas dos sistemas naturais, transpor uma música era impossível. Simon Steven⁵, no final do século XVI, foi o primeiro matemático a empreender esforços sobre a divisão da oitava em doze partes iguais e o fez com uma aproximação bastante satisfatória do que viria mais tarde a se tornar o Sistema Temperado. O fato era que este sistema que tantos almejavam só viria a surgir em 1691 com o empenho do compositor Andreas Werkmeister⁶, quando os matemáticos passaram a usar logaritmos para calcular as notas musicais e os intervalos entre elas. Neste trabalho a abordagem ficará restrita ao Sistema Pitagórico e ao Sistema Temperado, uma vez que são os passos mais importantes no que tange o estudo matemático da música. O Pitagórico por ser pioneiro nos esforços de se fazer uma

⁴Marin Mersenne (1588 - 1648) foi um matemático, músico teórico, padre mínimo, teólogo e filósofo francês. Ficou conhecido sobretudo pelo seu estudo dos chamados primos de Mersenne.

⁵Matemático, mecânico e engenheiro militar flamengo nascido em Bruges, na Bélgica, a quem se deve a popularização do uso do sistema decimal de frações, o que viabilizou o uso divisionário das moedas, pesos e medidas em geral.

⁶Andreas Werckmeister nasceu em Benneckenstein, Alemanha (1645 -1706) e foi um organista, músico teórico e compositor do período barroco. Criou o sistema ”quase bem temperado” conhecido como Temperamento de Werckmeister.

fundamentação mais rigorosa dos estudos da música; e o Temperado por sua vasta utilização desde sua criação até os dias atuais. Está além das expectativas desta obra fazer julgamento acerca das qualidades musicais de um ou outro sistema, os estudos ficarão restritos às propriedades físico-matemáticas do som e características matemáticas de ambos os sistemas, pois a subjetividade e sensibilidade da música estão muito além daquilo que pode ser expresso em leis e fórmulas matemáticas.

Capítulo 1

Ondas e Sons

1.1 Ondas Mecânicas

As ondas do mar viajam por vários quilômetros, o que não acontece com as partículas de água; ao se ouvir um som, a onda sonora parte da fonte até o ouvinte sem, contudo, que as moléculas do ar façam o mesmo caminho. O que o movimento ondulatório faz é um transporte de energia sem que a matéria do meio desloque-se por todo o trajeto da onda. Ondas de ar, ou água, são exemplos de ondas mecânicas que propagam-se através de um meio deformável, também chamado elástico, e originam-se quando uma perturbação é criada em alguma parte deste meio. Essa perturbação é transferida às partículas desse meio devido às suas propriedades elásticas. A nível microscópico, as forças que agem entre os átomos são as responsáveis pela propagação das ondas mecânicas.

Ao alcançar uma partícula do meio, uma onda movimenta esta partícula fornecendo energia potencial e cinética, sem, contudo, carregá-la consigo. De fato, quando uma onda atinge uma partícula ela sofre um deslocamento em torno de sua posição original, no entanto não acompanha a onda no sentido em que esta se propaga. Este fenômeno já havia sido percebido por Leonardo da Vinci¹, segundo ele

¹Leonardo di ser Piero da Vinci (Anchiano, 15 de Abril (Calendário Juliano) de 1452 — Cloux, Amboise, 2 de Maio de 1519) foi um pintor, escultor, arquiteto, físico, engenheiro, botânico e músico do Renascimento italiano. É considerado um dos maiores gênios da história da Humanidade, embora não tivesse nenhuma formação na maioria dessas áreas, como na engenharia e na arquitetura.

“freqüentemente acontece que a onda foge do lugar onde foi criada, ao contrário do que acontece com a água; é como as ondas criadas pelo vento num campo de trigo, onde podemos observá-las correndo pelo campo, enquanto os pés de trigo permanecem no mesmo lugar.” HALLIDAY (1996)

1.2 Tipos de Ondas

Pode-se classificar as ondas de diferentes maneiras, um dos modos mais gerais é de acordo com o meio em que se propagam. Uma outra classificação é possível ao se analisar o movimento das partículas do meio em relação ao de direção de propagação da onda. Quando as partículas se movimentam na direção perpendicular à de propagação, diz-se que a onda é *transversal*. Pode-se criar esse tipo de onda empiricamente ao se movimentar rapidamente para cima e para baixo uma extremidade de uma corda esticada, conforme ilustrado na Figura 1.1. A onda viaja ao longo da corda, mas as partículas do meio movem-se perpendicularmente à direção do movimento de propagação.

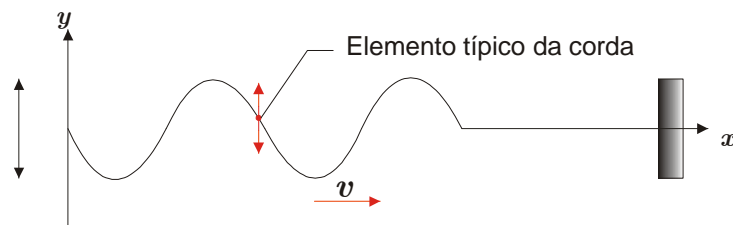


Figura 1.1: Propagação de uma onda transversal em uma corda.

Se em uma onda mecânica o movimento das partículas do meio forem para frente e para trás, na direção de propagação, cria-se, então, uma onda *longitudinal*. Quando do movimento para frente e para trás de uma mola esticada, uma onda longitudinal percorre a extensão da mola.

Não tinha propriamente um sobrenome, sendo "di ser Piero" uma relação ao seu pai, "Messer Piero" (algo como Sr. Pedro), e "da Vinci", uma relação ao lugar de origem de sua família, significando "vindo de Vinci"

A despeito dessa classificação, existem ondas que não são puramente transversais ou longitudinais, nas ondas que percorrem a superfície da água, as partículas movem-se para cima e para baixo, bem como para frente e para trás descrevendo movimentos elípticos. No entanto, aqui serão estudadas com maior ênfase as ondas transversais devido ao fato de ondas em cordas vibrantes serem desta natureza.

As ondas podem também ser classificadas de acordo com a variação no tempo do movimento das partículas do meio. Pode-se produzir um *pulso* que propaga-se ao longo de uma corda esticada ao se efetuar um único movimento transversal, em uma de suas extremidades. Cada partícula da corda permanece em repouso até que o pulso a alcance e, quando isso acontece, a partícula move-se rapidamente e logo volta ao repouso. Se forem produzidos vários pulsos criar-se-á um *trem de ondas periódico*, onde cada partícula da corda efetua um movimento periódico, na verdade um movimento harmônico simples.

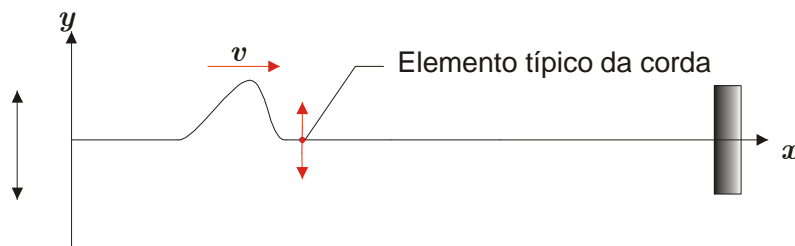


Figura 1.2: Propagação de um pulso em uma corda.

1.3 Ondas Progressivas

Uma onda transversal que se propaga em uma corda esticada é um exemplo do comportamento de ondas mecânicas.

Seja uma corda ideal em que uma perturbação mantém sua forma ao se propagar. Isto ocorre quando perdas por atrito ou outras formas de dissipação forem desprezíveis. Considerando-se a perturbação no plano xy e a propagação na direção x , a uma velocidade v . A coordenada y indica o deslocamento transversal de um

ponto particular da corda e depende da posição x e do tempo t ; matematicamente essa dependência pode ser expressa pela função a duas variáveis $y(x, t)$.

No instante $t = 0$ pode-se escrever então:

$$y(x, 0) = f(x),$$

onde f é uma função que descreve a onda e que pode, de forma hipotética, ser representada graficamente como na Figura 1.3:

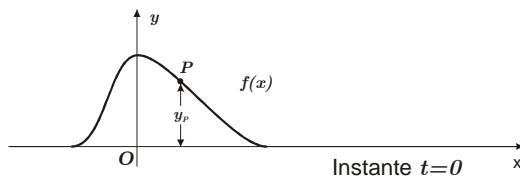


Figura 1.3: Um pulso transversal no instante de tempo $t = 0$. O ponto P representa um valor particular na fase do pulso e não um ponto particular do meio.

Como foi admitido que a forma da onda não se altera durante a propagação, num instante posterior t , ela ainda será descrita pela função $f(x)$. Em relação a um referencial que acompanhe o pulso, a forma deste é descrita pela função $f(x')$ relativamente à origem O' . A relação entre as abscissas x nos dois referenciais é $x' = x - vt$. De tal forma que num instante t qualquer a onda pode ser descrita por:

$$y(x, t) = f(x') = f(x - vt), \quad (1.1)$$

onde a crista do pulso define a origem da coordenada x' .

Assim, da equação 1.1 a função $f(x - vt)$ tem no instante t a mesma forma em relação ao ponto $x = vt$, que a função $f(x)$ tem em relação ao ponto $x = 0$ em $t = 0$ (Figura 1.4).

Se a onda mantiver sua forma enquanto progride, isso significa que para qualquer instante t a coordenada y do ponto P , denotada por y_P , é constante. De 1.1 a única condição para que isso aconteça é que a coordenada x do ponto P aumente com o passar do tempo, de tal forma que $x - vt$ mantenha-se constante para qualquer instante t . Assim, uma fase genérica da onda obedece à equação.

$$x - vt = k. \quad (1.2)$$

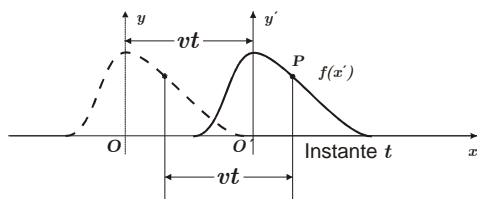


Figura 1.4: Em um instante de tempo t , o pulso percorre a distância vt no sentido x positivo. O ponto P na fase também percorreu a mesma distância vt .

onde k é constante.

É fácil verificar que a equação 1.2 caracteriza a velocidade da onda, basta, para isso, derivá-la em relação à variável t , o que resulta:

$$\frac{dx}{dt} - v = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v.$$

A velocidade $\frac{dx}{dt}$ descreve, então, o movimento de fase da onda e é conhecida por *velocidade de fase*, que consiste na velocidade com que um ponto caracterizado por determinada fase em uma onda periódica simples se desloca no espaço. Em geral, considera-se v como uma constante positiva independente de outras propriedades da onda, mas que depende de propriedades do meio de propagação.

1.4 Ondas Senoidais

A descrição dada na seção 2.3 é bastante geral e aplica-se a ondas de diferentes formas, sejam elas transversais ou longitudinais. Seja, por exemplo, uma onda transversal de forma senoidal que, no instante $t = 0$, esteja propagando-se ao longo da corda segundo a seguinte função

$$y(x, 0) = y_m \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right). \quad (1.3)$$

O deslocamento máximo y_m é chamado de *amplitude* da onda senoidal. O deslocamento y tem o mesmo valor em uma abscissa x qualquer, bem como em $x + \lambda$, $x + 2\lambda$, onde o símbolo λ representa o *comprimento de onda* e indica a distância entre pontos de mesma fase.

De modo geral para um instante t qualquer, uma onda que se propaga no sentido $+x$ e com velocidade v , pode ser descrita, nos mesmos moldes de 1.1, por:

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) \right). \quad (1.4)$$

O *período* T da onda é o tempo que um ponto qualquer da onda leva para completar um ciclo do movimento transversal. Durante o intervalo de tempo T , a onda percorre a distância vT que corresponde a um certo comprimento de onda λ . Do ponto de vista matemático tem-se:

$$\lambda = vT. \quad (1.5)$$

Chama-se o inverso do período de *freqüência* f da onda: $f = \frac{1}{T}$ e é medido em ciclos por segundo ou hertz (Hz).

Então forma equivalente se obtém da equação 1.5 que:

$$v = \lambda f. \quad (1.6)$$

Agora, substituindo 1.6 em 1.4, obtém-se uma outra expressão para a onda senoidal.

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen} \left(2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right). \quad (1.7)$$

Pode-se reescrever a equação 1.7 de uma forma mais sintética com as grandezas angulares *número de onda* k , que é a quantidade de ondas por unidade de distância, ou seja, o número de vezes que uma onda atinge a mesma fase em uma determinada distância de propagação e *freqüência angular* ω , que significa a variação ao longo do tempo do ângulo de fase do ponto P , definidas como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{e} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Assim, reescrevendo a expressão 1.7 em termos das grandezas definidas acima, a equação que descreve a onda que propaga-se no sentido positivo de x fica:

$$y(x, t) = y_m \operatorname{sen} (kx - \omega t). \quad (1.8)$$

Na onda descrita na equação 1.8 admite-se que o deslocamento da onda na posição $x = 0$, e no instante $t = 0$ seja nulo, esta situação normalmente não ocorre

em situações práticas. Uma expressão mais geral para uma onda que desloca-se no sentido positivo do eixo x é dada por:

$$y(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t - \phi). \quad (1.9)$$

O argumento do seno, $kx - \omega t - \phi$, é chamado *fase* da onda.

Duas ondas são ditas em fase se têm a mesma fase ou se suas fases diferem por um múltiplo inteiro de 2π , ou seja, ondas em fase são ondas que descrevem o mesmo movimento num mesmo intervalo de tempo.

O ângulo ϕ é chamado *constante de fase*, e não afeta o formato da onda, apenas a desloca no tempo ou no espaço. A maneira como a constante de fase interfere em uma onda pode ser mais claramente analisado na equação 1.9 for reescrita de forma equivalente, como a seguir:

$$y(x, t) = y_m \text{sen}\left(k\left(x - \frac{\phi}{k}\right) - \omega t\right), \quad (1.10a)$$

ou ainda

$$y(x, t) = y_m \text{sen}\left(kx - \omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right). \quad (1.10b)$$

A constante de fase altera diferentemente a onda em (1.10a) e em (1.10b), onde causa um deslocamento espacial e outro temporal, respectivamente. Quando a constante de fase em (1.9) for positiva ocorre um adiantamento em relação a uma onda idêntica com constante de fase $\phi = 0$, já se for negativa, o deslocamento será de atraso quando comparado com uma onda idêntica de constante de fase $\phi = 0$.

Para um ponto particular da corda de abcissa x_1 o deslocamento vertical, ou seja, ao longo de y neste ponto pode ser descrito pela seguinte equação:

$$y(t) = -y_m \text{sen}(\omega t + \phi'),$$

onde a constante de fase $\phi' = \phi - k x_1$ substitui a constante ϕ da expressão 1.9 e ainda é uma equação que descreve um movimento harmônico simples. Assim, pode-se concluir que enquanto o trem de ondas percorre a corda, um elemento qualquer desta executa um movimento harmônico simples em torno de sua posição de equilíbrio.

1.5 Ondas Sonoras e Ondas Senoidais

O estudo das ondas senoidais é altamente relevante quando se fala de ondas sonoras, esta importância está na solução da seguinte equação diferencial:

$$\ddot{y} + k\frac{y}{m} = 0. \quad (1.10)$$

A equação 1.10 descreve o comportamento de um objeto que está sujeito a uma força em torno de uma posição de equilíbrio, como em uma corda vibrante por exemplo, e tem como solução uma função senoidal. A expressão 1.10 dá também uma aproximação do comportamento da membrana basilar, ou de qualquer outro órgão do ouvido quando da passagem do som do ar externo até a cóclea. Na verdade, a aproximação não é apurada em muitos aspectos. No caso das ondas sonoras, a inconsistência de 1.10 está no fato de que esse tipo de onda não é constituído por uma única onda senoidal. Por exemplo, quando uma corda de um violino é dedilhada, um movimento periódico será criado, mas será o resultado da soma de várias ondas senoidais com suas respectivas amplitudes.

Vejamos agora como chegar à equação 1.10.

Seja uma partícula elementar de massa m da corda sujeita à uma força F em torno de uma posição de equilíbrio, $y = 0$, e cuja magnitude é proporcional à distância y da posição de equilíbrio. Então, as grandezas citadas podem ser quantificadas pela expressão do oscilador harmônico simples:

$$F = -ky \quad (1.11)$$

onde k é uma constante elástica, F é a força de restauração e y é a distância da partícula em relação à posição de equilíbrio.

Agora, pela segunda lei de Newton pode-se escrever também:

$$F = ma. \quad (1.12)$$

Como a aceleração é definida como a derivada em relação ao tempo t da função $v = v(t)$, ou seja, a taxa de variação da velocidade da partícula em relação ao tempo, algebricamente tem-se:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Pode-se, então, reescrever a expressão 1.12 da seguinte maneira:

$$F = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (1.13)$$

Agora, comparando-se as equações 1.11 e 1.13 pode-se concluir que:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky,$$

e portanto.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{y}{m} = 0.$$

Pode-se, ainda, denotar a equação acima de uma outra maneira, como:

$$\ddot{y} + k \frac{y}{m} = 0 \quad (1.14)$$

E assim chega-se à equação diferencial 1.10 que deu início à esta discussão na abertura desta seção e tem como soluções as seguintes funções:

$$y = A \cos \left(t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) + B \operatorname{sen} \left(t \sqrt{\frac{k}{m}} \right), \quad (1.15)$$

onde A e B , são números reais quaisquer e determinam a amplitude de oscilação.

De fato, observe que:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -A \sqrt{\frac{k}{m}} \operatorname{sen} \left(t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) + B \sqrt{\frac{k}{m}} \cos \left(t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} &= -A \frac{k}{m} \cos \left(t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) - B \frac{k}{m} \operatorname{sen} \left(t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{k}{m} \left[A \cos \left(t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) + B \operatorname{sen} \left(t \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} &= -k \frac{y}{m} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + k \frac{y}{m} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ddot{y} + k \frac{y}{m} &= 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

O fato de a equação 1.15 ser solução para a equação diferencial de segunda ordem 1.14 é a justificativa para o porquê de ondas sonoras e, de modo mais geral, de movimentos periódicos serem expressos por funções senoidais e não um outro tipo de função. Como citado anteriormente, a equação 1.14 descreve o movimento da membrana basilar do ouvido quando da transmissão de uma onda sonora através do ouvido humano. Em outras palavras esta equação descreve como o ouvido humano percebe o som. A equação 1.14 também descreve o movimento oscilatório de um ponto particular da corda, ou seja, um ponto da corda vibrante descreve um movimento harmônico simples.

A equação 1.14 representa a oscilação de um ponto particular da corda.

Para a vibração geral da corda pode-se enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1.1 *O deslocamento $y(x, t)$ correspondente à vibração de uma corda de extremos $(0, 0)$ e $(L, 0)$ e densidade linear ρ , satisfaz a equação da onda*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

cuja solução geral é dada por

$$y(x, t) = f(ct + x) + f(ct - x).$$

Demonstração Considere o segmento $[0, L] \times \{0\}$ num plano cartesiano xy , representando uma corda de comprimento L em repouso. Pode-se assumir que para cada instante t a partícula, representada pelo ponto de ordenada x da corda tem ordenada $y(x, t)$ e presumir que os valores assumidos por $y(x, t)$ são menores que L , ou seja, que a amplitude de vibração é pequena.

Em relação a um pequeno intervalo da corda delimitado pelas abcissas x e $x + h$, como representado na Figura 1.5, pode-se fazer as seguintes considerações.

O ângulo θ_x , num dado instante t , é tal que $\tan \theta_x = \frac{\partial y}{\partial x}$; $-T \sin \theta_x$ é a componente vertical da força exercida no extremo esquerdo do segmento e $T \sin \theta_{x+h}$ é a componente vertical da força exercida no extremo oposto, onde T é a tração a que a corda está submetida. É importante salientar que as forças têm direções levemente diferentes, pois são tangentes à corda nas *extremidades* do elemento de comprimento infinitesimal e por isso não anulam-se mutuamente. Para valores pequenos

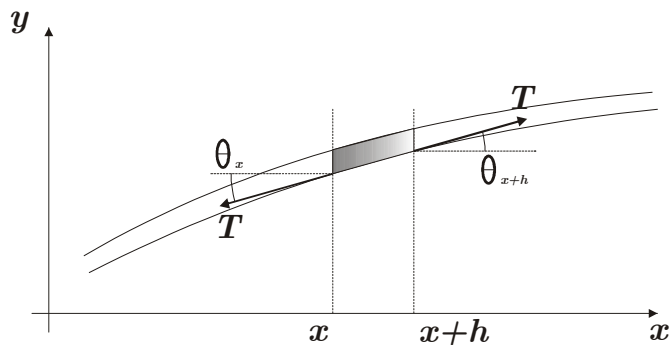


Figura 1.5: Um elemento de corda sob tração T em um instante durante a passagem da onda.

de θ_x , pode-se fazer a aproximação $\sin \theta_x \approx \tan \theta_x$. Como a oscilação considerada tem amplitude pequena, podemos, de forma aproximada, exprimir a diferença das componentes verticais da força por

$$\begin{aligned}
 T \tan \theta_{x+h} - T \tan \theta_x &\approx T \left(\frac{\partial y(x+h)}{\partial x} - \frac{\partial y(x)}{\partial x} \right) \Rightarrow \\
 T \tan \theta_{x+h} - T \tan \theta_x &\approx Th \left(\frac{\frac{\partial y(x+h)}{\partial x} - \frac{\partial y(x)}{\partial x}}{h} \right) \Rightarrow \\
 T \tan \theta_{x+h} - T \tan \theta_x &\approx Th \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{1.17}
 \end{aligned}$$

Como o movimento horizontal é desconsiderado, a diferença 1.17 exprime a força a que o segmento está submetido. No entanto, esta força também pode ser expressa pela segunda lei de Newton.

Decorre então que como

$$F = ma = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

$$Th \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Como a densidade linear é ρ , então a massa do segmento é ρh , portanto

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \approx \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{1.18}$$

Resulta então que para valores pequenos de θ_x , o movimento $y(x, t)$ da corda satisfaz de forma bastante aproximada à equação 1.18, que, se reescrita de uma outra forma,

corresponde à equação de onda

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (1.19)$$

onde $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Note que c é, na verdade, a velocidade de propagação da onda pois, fazendo a análise dimensional de c , tem-se:

$$[c]_{SI} = \sqrt{\frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{\frac{kg}{m}}} = \sqrt{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{m}{s}$$

Agora o problema reside em encontrar uma solução geral para a equação 1.19. Para tanto pode-se começar com as seguintes mudanças de variáveis variáveis:

$$u = ct + x$$

e

$$v = ct - x$$

Pela regra da cadeia, tem-se:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = c \frac{\partial y}{\partial u} + c \frac{\partial y}{\partial v} \quad (1.20)$$

Se a equação 1.20 for derivada novamente, tem-se

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(c \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + c \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} \right) c + \left(c \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} + c \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right) c$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right) \quad (1.21)$$

De modo análogo obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v} \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\end{aligned}\tag{1.22}$$

Aplicando os resultados obtidos em 1.21 e 1.22 na equação da onda 1.19, resulta:

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right) = c^2 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \right)\tag{1.23}$$

Simplificando-se 1.23, segue que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0\tag{1.24}$$

pelo que,

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right) = 0\tag{1.25}$$

Segue que $\frac{\partial y}{\partial v}$ é uma função independente de u , por isso pode-se encará-la como uma função que depende apenas de v , ou seja $\frac{\partial y}{\partial v} = h(v)$.

Daí,

$$y = g(v) + f(u)\tag{1.26}$$

onde $g(v)$ é uma primitiva de $h(v)$ e $f(u)$ que pode ser encarada como uma constante em relação a v , resultante da integração de $\frac{\partial y}{\partial v}$.

Substituindo novamente as variáveis em 1.26

$$y = g(ct - x) + f(ct + x).\tag{1.27}$$

■

A equação 1.27 é creditada a d'Alembert (1717-1783) e a onda $g(ct-x)$ representa uma onda com velocidade de propagação c que viaja da esquerda para a direita; e, de modo análogo, $f(ct+x)$ representa uma onda viajando para a esquerda com a

mesma velocidade. A natureza dessas duas ondas é arbitrária, o que significa que elas poderiam ser ondas senoidais ou de qualquer outra forma que se desejasse.

Observação 1 *Embora a equação de onda faça sentido para qualquer função com derivadas parciais de segunda ordem, as soluções que interessam aqui são aquelas em que a função é contínua. Dito de outro modo, o deslocamento de uma corda não pode ser expresso por meio de uma função descontínua.*

1.6 Leis de Mersenne

A velocidade de propagação numa corda de comprimento L depende da massa de um elemento de corda e da força entre elementos vizinhos que é a tração F a qual a corda está sujeita. Se aumentarmos a tração na corda, como fazemos ao apertar a cravelha de um violão, a força entre os elementos vizinhos aumentará e, assim, pode-se perceber que a velocidade da onda aumenta, ou seja, que o som fica mais agudo. Dito de outra forma, a frequência aumenta. Um elemento de corda pode ser caracterizado por sua densidade linear μ que é a massa por unidade de comprimento da corda. Supondo que a velocidade depende apenas dessas duas grandezas, podemos fazer a análise dimensional e escrever:

$$v \propto F^a \mu^b, \quad (1.28)$$

onde a e b são expoentes a serem determinados. Escrevendo 1.28 em termos da massa M , do comprimento L e do tempo T , resulta:

$$[v] = [F^a] [\mu^b]$$

$$\frac{L}{T} = \left(\frac{ML}{T^2} \right)^a \left(\frac{M}{L} \right)^b$$

$$\frac{L}{T} = \frac{M^{a+b} L^{a-b}}{T^{2a}}$$

Observando-se o expoente de M tem-se que:

$$a + b = 0 \Rightarrow a = -b \quad (1.29)$$

Com base no expoente de T :

$$2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2},$$

e de 1.29:

$$b = -\frac{1}{2}.$$

Substituindo em 1.28, resulta:

$$v \propto \sqrt{\frac{F}{\mu}}.$$

Ainda sabe-se de 1.6, apresentada na seção 1.4 que a frequência f é inversamente proporcional ao comprimento de onda λ , que neste caso está limitado a L e que f é diretamente proporcional a v .

$$v \propto f \propto \frac{1}{L}.$$

Portanto pode-se reunir os resultados acima obtidos pela expressão:

$$f \propto \frac{1}{L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}. \quad (1.30)$$

Em 1.30 estão resumidas as três leis de Mersenne que são as seguintes:

- *1ª Para uma determinada corda com determinada tensão, o período de vibração da corda varia de acordo com o seu comprimento; ou seja, como a frequência é o inverso do período, significa então que a frequência varia com o inverso do comprimento;*
- *2ª Quando o comprimento de uma corda é dado, o período varia como o inverso da raiz quadrada da tensão; isto é, em particular, quanto mais se estica a corda, mais os sons se tornam agudos;*
- *3ª Quando são dados o comprimento e a tensão de uma corda, o período varia como a raiz quadrada da densidade linear do material de que é feita a corda;*

Algebricamente estas leis podem ser expressas como na Tabela 3.3.

<i>Lei</i>	<i>Periodo</i>	<i>Freqüência</i>	<i>Constantes</i>
<i>Lei 1</i>	$T \propto L$	$f \propto \frac{1}{L}$	W, F
<i>Lei 2</i>	$T \propto \frac{1}{\sqrt{F}}$	$f \propto \sqrt{F}$	W, L
<i>Lei 3</i>	$T \propto \sqrt{\mu}$	$f \propto \frac{1}{\sqrt{\mu}}$	L, F

Tabela-3.3

De acordo com as leis de Mersenne pode-se criar uma analogia com as cordas de um piano “simplificado”, onde cada corda está sob a mesma tensão e todas têm a mesma densidade linear, de forma que se obtém as diferentes freqüências da escala apenas alterando o comprimento. Como o piano contém cerca de 7 oitavas e a cada intervalo de oitava aumenta a freqüência no fator de 2 a freqüência da nota mais alta (quase $4200Hz$) é cerca de 128 vezes a freqüência da nota mais grave (aproximadamente $27,5Hz$). Dessa forma, segundo a primeira lei de Mersenne, se a corda da nota de maior freqüência medir cerca de $15cm$ a corda do som mais grave medirá algo em torno de $19,5m$!

A construção de pianos baseia-se nas leis de Mersenne da seguinte maneira: para sons graves são utilizadas cordas mais “pesadas”, isto é, com uma densidade linear μ maior, de modo análogo, para sons mais agudos, as cordas utilizadas são de uma densidade linear menor. Para se obter as notas no piano varia-se a densidade linear de cada corda, já que a tensão é praticamente a mesma em todos os fios.

Capítulo 2

Ondas Estacionárias

2.1 Superposição

É possível perceber que duas ou mais ondas ao percorrerem o mesmo espaço, mantêm-se independentes. Isso pode ser ilustrado quando se ouve uma banda ou orquestra, pois é possível perceber o som emitido por cada instrumento em separado. Este exemplo ilustra o *princípio da superposição*: quando várias ondas se encontram numa região do espaço, o deslocamento de qualquer partícula desta região, em qualquer instante de tempo, é a soma do deslocamento provocado por cada onda isoladamente. A título de exemplo pode-se considerar duas ondas que se propagam ao longo de uma mesma corda esticada. Se cada uma delas se deslocasse sozinha na corda os deslocamentos causado seriam $g(x_1, t)$ e $f(x_2, t)$. No entanto quando ambas as ondas percorrem a corda o deslocamento é dado por:

$$y(x, t) = g(x_1, t) + f(x_2, t). \quad (2.1)$$

Quando pulsos de onda se sobrepõem em uma corda, o deslocamento da corda em um dado ponto x é a soma algébrica dos deslocamentos como o descrito pela equação 2.1. Os pulsos passam um através do outro e continuam no sentido de propagação como se o entrecruzamento não tivesse ocorrido.

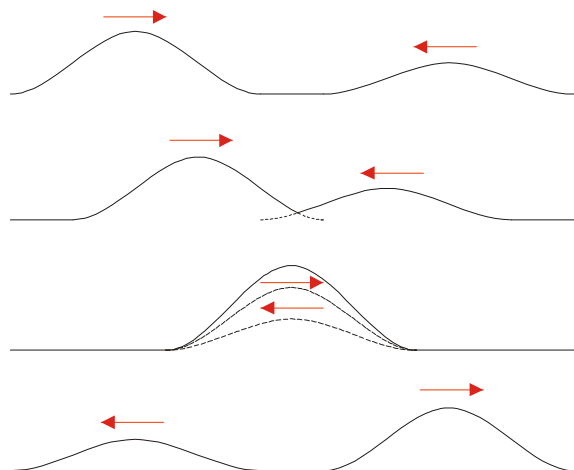


Figura 2.1: Dois pulsos propagam-se em sentidos opostos em uma corda esticada. Aplica-se o princípio da superposição quando os pulsos se entrecruzam.

2.2 Ondas Complexas e Séries de Fourier

Sejam $y_1(x_1, t)$ um tom fundamental, $y_2(x_2, t)$ seu segundo harmônico¹. Considere o caso em que duas ondas $y_1(x_1, t)$ e $y_2(x_2, t)$ se propagam ao longo de uma corda e a soma algébrica desses dois harmônicos. A esta soma dá-se o nome de *onda complexa*. De modo geral, uma onda complexa é a soma de dois ou mais harmônicos de uma onda e depende basicamente da amplitude das ondas que a compõe e da fase do harmônico mais agudo em relação ao fundamental.

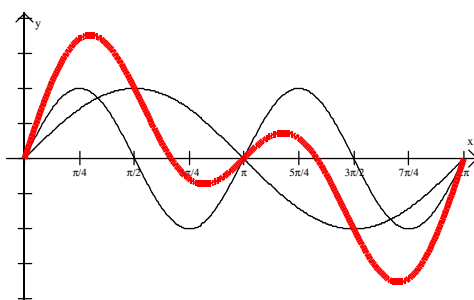


Figura 2.2: A soma de um tom fundamental e seu segundo harmônico (ambos em traçado mais fino), gerando uma onda complexa (traçado mais espesso)

¹Pode-se entender um tom fundamental e seu segundo harmônico como duas notas que diferem por uma oitava, onde a primeira é a mais grave.

De uma maneira genérica, pode-se mostrar que *qualquer onda periódica* pode ser decomposta como uma soma de senos e cossenos. Isso é possível graças à teoria de Fourier.

Teorema 2.1 *Toda função periódica de período 2π , definida em \mathbb{R} e integrável, segundo Riemann, em qualquer intervalo limitado pode ser expandida numa série da seguinte forma:*

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \text{sen}(nt)]. \quad (2.2)$$

Demonstração Observe que:

$$\cos(nt) = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \quad (2.3)$$

$$\text{sen}(nt) = \frac{e^{-int} - e^{int}}{2i} \quad (2.4)$$

Para demonstrar 2.3, pode-se partir do pressuposto que todo número complexo pode ser escrito na forma de Euler:

$$e^{int} = \cos(nt) + i \text{sen}(nt) \quad (2.5)$$

e também

$$e^{-int} = \cos(nt) - i \text{sen}(nt). \quad (2.6)$$

Somando-se 2.5 e 2.6 resulta:

$$e^{int} + e^{-int} = 2 \cos(nt)$$

e, por isso:

$$\cos(nt) = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}$$

De modo análogo, ao subtrairmos 2.6 de 2.4, obtemos:

$$e^{int} - e^{-int} = 2i \text{sen}(nt).$$

Donde:

$$\text{sen}(nt) = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}.$$

Segue então que a equação 2.2 pode ser reescrita do seguinte modo:

$$g(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad (2.7)$$

onde, para cada $n \in \mathbb{Z}$, tem-se:

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 \quad (2.8)$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \quad (2.9)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n). \quad (2.10)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Para os resultados que seguem, exploraremos a série 2.2 sob a forma 2.7.

Para determinar a série 2.2, falta-nos determinar os coeficientes c_n , que dependerão da função g . Podemos multiplicar a equação 2.7 em ambos os membros da igualdade por e^{-ink} , com k inteiro, e integrar em $[-\pi, \pi]$, com relação à variável t , resulta então que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t} dt, \quad (2.11)$$

Quando $n \neq k$, de 2.11 segue que:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-k)t} dt &= \left. \frac{e^{i(n-k)t}}{i(n-k)} \right|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{i(n-k)\pi} - e^{-i(n-k)\pi}}{i(n-k)} \\ &= \frac{e^{i\pi} (1^{n-k} - 1^{-(n-k)})}{i(n-k)} \\ &= \frac{e^{i\pi} (1^{n-k} - 1^{n-k})}{i(n-k)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} dt = 0$, sempre que $n \neq k$.

Agora, para o caso em que $n = k$, temos:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} e^0 dt &= \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt \\ &= t \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

De modo que sobram somente os termos em que $n = k$. Daí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ikt} dt = 2\pi c_k, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.12)$$

Tomando-se $k = n$, obtém-se a fórmula de c_n :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int} dt &= 2\pi c_n \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int} dt\end{aligned} \quad (2.13)$$

Agora, a partir das equações 2.9 e 2.10 fica fácil determinar a_n e b_n . Primeiro observe que ao se somar 2.9 e 2.10 o que se obtém é:

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

E, a partir daí:

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-int} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{int} dt \\ a_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) (e^{-int} + e^{int}) dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{(e^{-int} + e^{int})}{2} dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{(e^{int} + e^{-int})}{2} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos(nt) dt, \text{ para } n \geq 1\end{aligned} \quad (2.14)$$

De modo análogo, se subtraímos 2.8 de 2.10 resulta:

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) \quad (2.15)$$

De 2.15 pode-se inferir que:

$$\begin{aligned}
 b_n &= i \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{int} dt \right) \\
 b_n &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) (e^{-int} - e^{int}) dt \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{(e^{int} - e^{-int})}{2i} dt \\
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(nt) dt, \text{ para } n \geq 1
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Com isso, ficam bem determinados os coeficientes a_n e b_n e, por conseqüência, a série

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \text{sen}(nt)].$$

■

Os números c_n , a_n e b_n , são chamdos *coeficientes de Fourier*, e estão associados às séries em 2.2 e 2.7. Séries estas chamadas *Séries de Fourier*². A rigor, para se mostrar que $g(t)$ pode ser expandida como uma série de senos e cossenos, deve-se mostrar que a série realmente converge para a função g o que não será feito aqui, tal demonstração pode ser encontrada em [10].

O que se acabou de fazer foi analisar o caso particular das funções periódicas de período 2π , agora esta idéia será generalizada para qualquer função periódica e integrável.

Seja $f(x)$ uma função periódica de período $2l$ e a mudança de variáveis $x = \frac{lt}{\pi}$.

²Fourier foi o primeiro a estudar sistematicamente tais séries infinitas, após investigações preliminares de Euler, D'Alembert, e Daniel Bernoulli. Ele aplicou estas séries à solução da equação do calor, publicando os seus resultados iniciais em 1807 e 1811, e publicando a sua *Théorie analytique de la chaleur* em 1822. De um ponto de vista moderno, os resultados de Fourier são algo informais, em boa parte devido à falta de uma notação concisa de funções e integrais nos inícios do século XIX. Mais tarde, Dirichlet e Riemann expressaram os resultados de Fourier com grande precisão e rigor formal.

Então:

$$g(t) = f(x) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right).$$

Com a mudança, segue que $g(t)$ é periódica e, tal qual $f(x)$, satisfaz a condição de Riemann, portanto pode ser expandida como sob a forma em 2.7. Substituindo-se a variável t por $\frac{lt}{\pi}$ em 2.7 e 2.13 e redimensionando-se o intervalo de integração, segue que

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \text{ onde } c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{\frac{-in\pi x}{l}} dx.$$

Por processos idênticos aos que foram desenvolvidos para o caso particular de período 2π chega-se a série de senos e cossenos a seguir:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right),$$

onde:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \text{ para } n \geq 0$$

e

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \text{ para } n \geq 1$$

As ondas complexas são fundamentais para a formação de acordes musicais e delas depende o timbre, ou seja, a qualidade sonora de cada instrumento. É pelo timbre que é possível distinguir de que instrumento é um determinado som. A maneira como a onda emitida por um instrumento é reconhecida pelo ouvido humano, depende da maneira como estão superpostos os seus harmônicos. O timbre ainda está intimamente relacionado à série harmônica, que será estudada mais adiante.

2.3 Ondas Estacionárias

Quando tratou-se das ondas complexas anteriormente, não foram levados em conta nem o sentido de propagação e nem a das ondas que as compunham. Suponha agora que duas ondas, f e g , de mesma amplitude se propaguem em sentidos opostos, ou seja, uma da esquerda para a direita e outra da direita para a esquerda. Quando

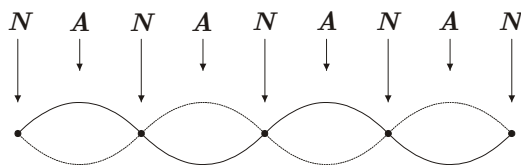


Figura 2.3: Padrão de nós e antinós criado numa onda estacionária.

estas ondas se superpõem surgem pontos da corda chamados *nós* cujo deslocamento é nulo em *qualquer* instante. Ao mesmo tempo, existem pontos onde o deslocamento oscila com a máxima amplitude aos quais chama-se *antinós*. Os nós e antinós aparecem de forma intercalada, ou seja, entre dois nós sempre existe um antinó e vice-versa. Quando numa onda surge esse padrão de nós e antinós, a onda é dita estacionária.

Sejam y_1 e y_2 duas ondas progressivas cujas equações são:

$$y_1(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t), \quad (2.17)$$

e

$$y_2(x, t) = y_m \text{sen}(kx + \omega t). \quad (2.18)$$

Para analisar matematicamente as ondas estacionárias, pode-se tomar resultante da soma de 2.17 e 2.18, que pode ser escrita como:

$$y(x, t) = y_1(x_1, t) + y_2(x_2, t). \quad (2.19)$$

Note a similaridade entre a onda 2.1 e 2.19. A diferença entre as referidas ondas está no sentido de propagação de y_1 , que se propaga da esquerda para a direita, e y_2 , que se propaga da direita para a esquerda. A equação 2.19 pode ser reescrita do seguinte modo:

$$y(x, t) = y_m \text{sen}(kx - \omega t) + y_m \text{sen}(kx + \omega t)$$

ou ainda, segundo a relação trigonométrica

$$\text{sen } \alpha + \text{sen } \beta = 2 \text{sen} \left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right) \cos \left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right),$$

obtém-se:

$$y(x, t) = 2y_m \sin(kx) \cos(\omega t). \quad (2.20)$$

Esta expressão rege o movimento de uma onda estacionária. Há que se notar que a equação 2.20 não pode representar uma onda progressiva pois não tem fase $x - vt$, como apresentado em 1.2, isto quer dizer que a onda “não se propaga” mas permanece estacionária, ou seja, cada partícula numa posição x qualquer, executa um movimento harmônico simples em decorrência da superposição. Em uma onda progressiva, cada partícula vibra com mesma amplitude; em uma onda estacionária, porém, *a amplitude não é a mesma para partículas diferentes, mas varia de acordo com a posição x de cada partícula.* Observando 2.20 pode-se perceber que todas as partículas vibram com uma frequência angular ω , e que $|2y_m \sin(kx)|$, admite valor máximo de $2y_m$ onde

$$\begin{aligned} kx &= \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots \\ &\text{ou} \\ x &= \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots \end{aligned}$$

Esses pontos são os antinós, locais onde a onda tem máxima amplitude, e estão separados por meio comprimento de onda. A amplitude tem valor mínimo zero nos pontos onde

$$\begin{aligned} kx &= \pi, 2\pi, 3\pi, \dots \\ &\text{ou} \\ x &= \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots \end{aligned}$$

Esses pontos são os nós e estão separados, a exemplo dos antinós, por meio comprimento de onda.

Em suma, a amplitude da onda estacionária varia de zero, nos nós, até $|2y_m \sin(kx)|$, nos antinós.

Para efeito de ilustração observe a figura 2.4.

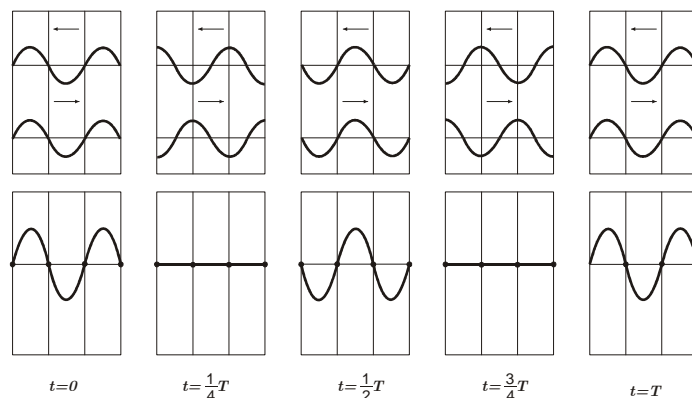


Figura 2.4: Em a) e em b) duas ondas progressivas de mesma amplitude e mesmo comprimento de onda propagam-se em sentidos opostos. Em c) a superposição em instantes de tempo diferentes gera uma onda de caráter estacionário.

Embora, só se tenha falado de ondas estacionárias transversais, este conceito pode ser estendido da mesma forma para ondas longitudinais. A produção de som em diversos instrumentos musicais depende fundamentalmente dos conceitos apresentados aqui. Uma corda de violão, por exemplo, vibra como uma onda estacionária transversal. Já num instrumento de sopro, onde a emissão de som depende basicamente da diferença de pressão de uma coluna de ar ao longo de um tubo, a onda em questão é longitudinal e também estacionária.

2.4 Ressonância e a Série Harmônica

Na seção 2.3 levou-se em consideração um par de ondas y_1 , y_2 propagando-se em sentidos opostos em uma mesma corda de forma que a soma delas resultasse em uma onda estacionária. Agora vamos observar o que acontece quando um único pulso transversal propaga-se ao longo de uma corda.

Seja um pulso, refletindo ao final de uma corda. Será feita a análise desta reflexão sob dois aspectos: quando a extremidade da corda estiver fixa; e quando a extremidade da corda estiver livre.

Entenda-se um corda com extremidade fixa quando uma de suas extremidades estiver bem presa, ou seja, se a propagação da corda for na horizontal e a extremidade

fixa for em $x = 0$, o deslocamento na vertical neste ponto será nulo. Para analisar esta situação sob um ponto de vista matemático é conveniente representar a onda sob a forma de d'Alembert:

$$y = g(ct - x) + f(ct + x).$$

Supondo a extremidade fixa em $x = 0$, a equação de d'Alembert fica:

$$0 = g(ct - 0) + f(ct + 0)$$

$$g(ct) = -f(ct).$$

Dessa forma, um pulso positivo reflete como um pulso negativo, caracterizando uma inversão de 180° na fase da onda.

Para uma corda com extremo livre pode-se imaginar que o extremo livre que pode se mover livremente no sentido transversal ao de propagação da onda. Aqui não estão sendo levadas em conta as forças dissipativas, assim deve-se supor esse extremo preso a um anel de massa desprezível que desliza sem atrito por uma guia.

Ao se derivar a equação de d'Alembert em relação a x , obtém-se:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -g' + f'. \quad (2.21)$$

Como pode ser visto mais detalhadamente em [6] numa corda de extremo livre ocorre $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, pois nenhuma força transversal é possível. Assim, da equação 2.21, resulta que:

$$0 = -g'(ct) + f'(ct).$$

Portanto:

$$g'(ct) = f'(ct). \quad (2.22)$$

Tomando-se a primitiva em ambos os lados, chega-se que:

$$g(ct) = f(ct).$$

De forma que um pulso com fase positiva reflete com a mesma fase positiva.

Um trem de ondas infinito se propagando ao longo de uma corda de extremidade fixa ao refletir produz uma onda estacionária. Então, não é mais necessário que

duas ondas estejam se propagando para se obter uma onda estacionária, uma única onda refletida em uma extremidade fixa é capaz de gerar ondas de caráter estacionário. Nesta extremidade fixa deve, necessariamente haver um nó, pois, neste ponto, o deslocamento transversal será nulo em qualquer instante de tempo, o que caracteriza a onda como estacionária.

De fato, não é sequer necessário um trem de ondas para se obter uma onda estacionária. Se a corda vibrante, de comprimento L , estiver com suas duas extremidades fixas e um longo pulso começar a se propagar, este será refletido em ambas as extremidades da corda e acabará gerando uma onda estacionária. Esta é a situação que se observa ao se dedilhar uma corda de um violão, caso em que se aplica um pulso inicial, ou se tocar o violino com um arco, neste caso o arco faz um trem de ondas contínuo se propagar ao longo da corda.

Para que uma onda estacionária se propague ao longo de uma corda fixa em seus dois extremos duas condições devem ser satisfeitas:

- Deve existir um nó em cada extremidade, pois são locais de amplitude zero;
- O comprimento L da corda deve ser igual ao um número inteiro de “meios comprimentos de onda”.

Na seção 2.4 está exposta a relação entre o comprimento de onda λ e a velocidade de propagação v da seguinte maneira.

$$v = \lambda f \tag{2.23}$$

Onde v é a velocidade de propagação da onda no meio que, neste caso, é um corda esticada. Note-se que v permanece constante para ondas de freqüências quaisquer num mesmo meio. Com isso, pode-se determinar a freqüência de várias ondas estacionárias para uma corda fixa em suas duas extremidades. Chama-se estas ondas de *modos harmônicos* ou simplesmente *harmônicos* e a cada um deles se atribui um *número harmônico* n , que é igual ao número de “meios comprimentos de onda” contidos na onda estacionária, que dá a freqüência da onda estacionária. A freqüência de cada harmônico é dada pela multiplicação do respectivo número harmônico pela

freqüência do *modo fundamental* (primeiro harmônico), isto é, a onda estacionária mais simples que vibra com apenas um meio comprimento de onda.

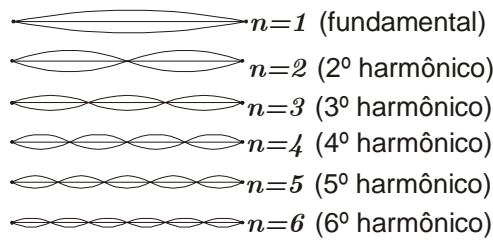


Figura 2.5: Representação gráfica dos seis primeiros harmônicos de um tom fundamental

Observe o caso em que se calcula a freqüência dos dois primeiros harmônicos de um modo fundamental de freqüência f_1 .

Para o caso em que $n = 1$:

Note que para este caso, temos $\lambda_1 = 2L$, pois tem-se apenas dois nós, o que implica em apenas um meio comprimento de onda

Da equação 2.23 tem-se:

$$v = \lambda_1 f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{v}{\lambda_1}$$

Agora para o caso em que $n = 2$, tem-se que $\lambda_2 = L$, ou seja, $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2}$.

Novamente de 2.23, obtém-se:

$$v = \lambda_2 f_2 \Rightarrow v = \frac{\lambda_1}{2} f_2 \Rightarrow f_2 = 2 \frac{v}{\lambda_1} = 2f_1$$

De modo geral, pode-se escrever:

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} \Rightarrow f_n = n \frac{v}{2L} \Rightarrow f_n = n f_1$$

e também

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \Rightarrow \lambda_n = \frac{\lambda_1}{n}$$

Na tabela 3.1 são dadas as freqüências e os respectivos comprimentos de onda dos oito primeiros harmônicos de uma corda de comprimento L .

<i>Número Harmônico</i>	<i>Comprimento de onda</i>	<i>Frequência</i> $\left(f = \frac{v}{\lambda}\right)$
1	$\lambda_1 = 2L$	$f_1 = \frac{v}{2L}$
2	$\lambda_2 = L = \frac{1}{2}\lambda_1$	$f_2 = \frac{v}{L} = 2f_1$
3	$\lambda_3 = \frac{2}{3}L = \frac{1}{3}\lambda_1$	$f_3 = \frac{v}{\frac{2}{3}L} = 3f_1$
4	$\lambda_4 = \frac{L}{2} = \frac{1}{4}\lambda_1$	$f_4 = \frac{v}{\frac{L}{2}} = 4f_1$
5	$\lambda_5 = \frac{2}{5}L = \frac{1}{5}\lambda_1$	$f_5 = \frac{v}{\frac{2}{5}L} = 5f_1$
6	$\lambda_6 = \frac{L}{3} = \frac{1}{6}\lambda_1$	$f_6 = \frac{v}{\frac{L}{3}} = 6f_1$
7	$\lambda_7 = \frac{2L}{7} = \frac{1}{7}\lambda_1$	$f_7 = \frac{v}{\frac{2L}{7}} = 7f_1$
8	$\lambda_8 = \frac{L}{4} = \frac{1}{8}\lambda_1$	$f_8 = \frac{v}{\frac{L}{4}} = 8f_1$

Tabela-3.1

O conjunto de ondas estacionárias como apresentado acima, com as frequências relacionadas por inteiros sucessivos é chamado de *série harmônica*.

Em música, a série harmônica é uma série de “subvibrações” de um tom fundamental, ou seja, quando tocamos uma nota no violão, todas as notas da série harmônica soam junto com a nota tocada, embora com menor amplitude.

A série harmônica é de fundamental importância pois ondas complexas podem ser formadas a partir da combinação de ondas que possuem frequências que estão na série harmônica de uma nota inicial tomada como fundamental. Além disso, os primeiros modos de construção de uma escala, como o pitagórico por exemplo, utilizavam-se da série harmônica, para a obtenção das notas que os compunham.

Um intervalo musical, uma espécie de “distância” entre notas de alturas diferentes, é sempre obtido de duas notas que mantêm uma razão específica entre suas frequências. A título de exemplo, uma oitava corresponde a uma razão de 1 para 2. Assim, os harmônicos 1 e 2 formam uma oitava, bem como os harmônicos 2 e 4, 3 e 6 e assim por diante. Uma quinta perfeita contém notas cuja frequência estão na razão de 2 para 3, assim como os harmônicos 2 e 3, 4 e 6, etc. Já a quarta perfeita é formada por notas que mantêm a razão de 3 para 4, como os harmônicos 3 e 4, 6 e 8, e assim por diante. A tabela 3.2 exhibe as frequências em relação ao tom fundamental e o intervalo musical correspondente a cada harmônico.

<i>Número Harmônico</i>	<i>Frequência</i>	<i>Intervalo Musical Correspondente</i>
1	f_1	<i>Unísson</i>
2	$f_2 = 2f_1$	<i>Uma oitava</i>
3	$f_3 = 3f_1$	<i>Uma oitava e uma quinta perfeita</i>
4	$f_4 = 4f_1$	<i>Duas oitavas</i>
5	$f_5 = 5f_1$	<i>Duas oitavas e uma terça maior</i>
6	$f_6 = 6f_1$	<i>Duas oitavas e uma quinta perfeita</i>
7	$f_7 = 7f_1$	<i>Duas oitavas e uma sétima menor</i>
8	$f_8 = 8f_1$	<i>Três oitavas</i>

Tabela-3.2

Retomando-se a equação 1.15, podemos escrever a equação que rege os harmônicos apresentados neste capítulo.

Assim, se 1.15, apresentada na seção 1.5, é a equação de uma partícula que vibra na corda, então

$$y = A_2 \cos \left(2t\sqrt{\frac{k}{m}} \right) + B_2 \sin \left(2t\sqrt{\frac{k}{m}} \right),$$

é a equação de um ponto da metade da corda vibrando (seu segundo harmônico) que em termos musicais equivale à oitava do tom fundamental da corda. De modo análogo

$$y = A_3 \cos \left(3t\sqrt{\frac{k}{m}} \right) + B_3 \sin \left(3t\sqrt{\frac{k}{m}} \right)$$

descreve um ponto da corda vibrando em seu terceiro harmônico, quando se divide a corda na razão de 2 para 3. De modo geral,

$$y = A_n \cos \left(nt\sqrt{\frac{k}{m}} \right) + B_n \sin \left(nt\sqrt{\frac{k}{m}} \right),$$

descreve um ponto vibrando no n-ésimo harmônico da corda.

Capítulo 3

Escalas Musicais

3.1 A influência Matemática na Concepção das Escalas Musicais

Nas seções anteriores, foi possível perceber que a cada comprimento de uma corda está associado um som. Então para cada comprimento diferente temos um som também diferente. Em termos matemáticos, podemos dizer que uma corda é um segmento de reta e, por isso, tem uma infinidade de pontos. Assim sendo, podemos verificar que existe uma bijeção entre os sons produzidos pela corda e \mathbb{R}^+ . Nesta bijeção, ao zero ficaria associado a ausência de som. Quando um compositor decide escrever uma música uma de suas primeiras escolhas é definir um conjunto de notas para sua obra, ou seja, de uma infinidade de frequências ele deve dizer quais são as que ele irá utilizar, ou de outra forma, que números positivos ele há de escolher. Este problema é resolvido quando se define uma *Escala Musical*, que pode ser encarada como um conjunto de números reais positivos (que representam as frequências) selecionados com base em critérios musicais e estéticos. As escalas mais comuns tomam como base o intervalo de oitava e o que distingue uma da outra é a maneira como este intervalo está dividido. As hipóteses para divisão de uma oitava são muitas. A seguir faremos uma análise mais detalhada de duas escalas: a *Escala Pitagórica* e a *Escala Temperada*. A pitagórica por ter sido a primeira forma de se discriminar frequências sonoras por meio da Matemática; e a temperada que é

o sistema mais utilizado atualmente, onde a oitava é dividida em doze partes iguais.

Existem outros sistemas que desconsideram a oitava como padrão para organização dos sons e que não serão abordados aqui. O que é comum a todos é que, independentemente dos argumentos musicais que o sustentam, a Matemática tem um papel importantíssimo em sua elaboração.

3.2 A Escala Pitagórica

“Um certo Pitágoras, numa das suas viagens, passou por acaso numa oficina onde se batia numa bigorna com cinco martelos. Espantado pela agradável harmonia (*concordiam*) que eles produziam, o nosso filósofo aproximou-se e, pensando inicialmente que a qualidade do som e da harmonia (*modulationis*) estava nas diferentes mãos, trocou os martelos. Assim feito, cada martelo conservava o som que lhe era próprio. Após ter retirado um que era dissonante, pesou os outros e, coisa admirável, pela graça de Deus, o primeiro pesava doze, o segundo nove, o terceiro oito, o quarto seis de não sei que unidade de peso.’ Assim descreve Guido d’Arezzo (992 -1050?), no seu pequeno mas influente tratado de música *Micrologus*, a lenda que atribui a Pitágoras (séc. VI AC) a descoberta fundamental da dependência dos intervalos musicais dos quocientes dos primeiros números inteiros, i.e., parafraseando o romano Boécio (séc.VI), ‘a grande, espantosa e muito sutil relação que existe entre a música e as proporções dos números’”.RODRIGUES (1999)

Os pitagóricos foram os primeiros a elaborar uma escolha de sons adequada ao uso musical e criaram o germe da primeira teoria matemática da música. Isso foi possível por causa das experiências com o *monocórdio*, um instrumento muito simples que consistia de uma corda esticada com um cavalete móvel. Ao variar a posição do cavalete a Escola Pitagórica conseguiu determinar as relações matemáticas que estão implícitas nas consonâncias consideradas mais importantes: o intervalo de oitava (*diapason*), o de quinta (*diapente*) e o de quarta (*diaterason*). Um fato curioso descoberto por eles também foi o fato de que estes sons eram obtidos a partir

de dois monocórdios com “cordas dispostas segundo razões do tipo $\frac{n+1}{n}, n = 1, 2, 3$. Se fixarmos uma corda de comprimento igual a $1m$ e fixarmos paralelamente a ela outras cordas de tamanho $\frac{3}{4}m, \frac{2}{3}m$ e $\frac{1}{2}m$, as razões entre o comprimento da primeira corda e os comprimentos das outras três cordas serão $\frac{4}{3}, \frac{3}{2}$ e $\frac{2}{1}$ ” [4] correspondentes aos intervalos de quarta quinta e oitava, respectivamente. A simplicidade das razões como $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$; e o fato de estarem associadas aos intervalos de quintas e oitavas, tiveram uma importância fundamental no modo como os gregos criaram uma escala de sete notas, muito próxima à escala que hoje conhecemos como diatônica, a escala sem alterações. Em termos práticos, a escala que se ouve ao se tocar as teclas brancas de um piano. Uma forma de se obter a referida escala é a seguinte:

Considerando, hipoteticamente, $Dó_0$ a nota obtida com o monocórdio solto, a uma razão de $\frac{2}{3}$ do comprimento desta mesma corda obtém-se o som que está a uma quinta acima de $Dó_0$ que corresponde ao Sol_0 . A $\frac{2}{3}$ de Sol_0 , encontra-se o $Ré_1$ que corresponde a $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ do comprimento. Repetindo o processo, vamos obter $Lá_1, Mi_2, Si_2$, que são todos sons mais agudos que o $Dó_1$. O que os pitagóricos fizeram foi reduzir estas frequências ao intervalo em que estão, ou seja, entre $Dó_0$ e $Dó_1$, dobrando o comprimento da corda quando os sons ultrapassassem o $Dó_1$. Para obter o comprimento L da corda correspondente ao som que está n oitavas acima do $Dó_0$ e cujo comprimento é l à primeira oitava, basta que se realize a seguinte operação

$$L = 2^n l. \quad (3.1)$$

Observe que com o procedimento ainda falta determinar o comprimento correspondente à nota $Fá_0$. Para tal basta determinar o comprimento de um som acima do qual $Dó_1$ é uma quinta, o que dá: $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}l$, daí $l = \frac{3}{4}$.

Da maneira como se acabou descrever, conhecido como *ciclo de quintas ascendentes*¹, os pitagóricos conseguiram determinar uma escala heptatônica com a qual acreditava-se que eles estivessem satisfeitos, já que a referida escala estava de acordo com os padrões estéticos musicais à época, mas continuando do mesmo modo, ou seja, multiplicando-se os comprimentos associados a cada som obtido por $\frac{2}{3}$ a partir do Si_2 , é possível obter outros cinco sons que correspondem às notas com as al-

¹O mesmo ciclo pode ser obtido por quartas descendentes.

terações: $F\acute{a}\#_3$, $D\acute{o}\#_4$, $Sol\#_4$, $R\acute{e}\#_5$ e $L\acute{a}\#_5$. Deste modo, os gregos conseguiram uma divisão da oitava em doze partes. A razão de serem doze sons se deve ao fato de que após se aplicar doze quintas a um dado som, obtém-se um uma nota que está cerca de sete oitavas acima do som inicial.

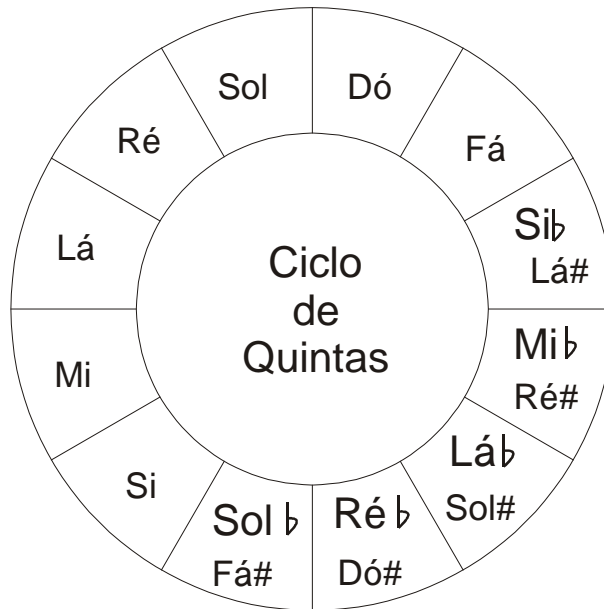


Figura 3.1: Seguindo-se o sentido anti-horário no esquema acima, obtém-se o ciclo de quintas ascendentes que Pitágoras descobriu. No sentido horário obtém-se um ciclo de quartas descendentes. Ambos os ciclos são equivalentes.

No entanto, doze quintas não correspondem exatamente a sete oitavas. Observe que o $L\acute{a}\#_5$ pode ser obtido por aplicação de dez quintas sucessivas ao $D\acute{o}_0$. Uma quinta acima de $L\acute{a}\#_5$ está o $F\acute{a}_6$, e a uma quinta ascendente de $F\acute{a}_6$ está o $D\acute{o}_7$, em outras palavras $D\acute{o}_7$ está doze quintas acima do $D\acute{o}_0$. Como o comprimento correspondente a $D\acute{o}_0$ é 1. O comprimento L de $D\acute{o}_7$ é dado por $(\frac{2}{3})^{12}$, pois corresponde a doze quintas a partir de $D\acute{o}_0$. Contudo, como $D\acute{o}_7$ está também a sete oitavas acima de $D\acute{o}_0$, segue que o comprimento de $D\acute{o}_7$ obtido dessa maneira é $(\frac{1}{2})^7$. Para que as doze quintas correspondessem às sete oitavas a razão $\frac{(\frac{1}{2})^7}{(\frac{2}{3})^{12}}$ deveria ser igual à unidade. No entanto, o que obtemos é:

$$\frac{(\frac{1}{2})^7}{(\frac{2}{3})^{12}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = 1,013643265... \quad (3.2)$$

A razão expressa em 3.2 é chamada de *coma pitagórico* e representa o defasamento entre as doze quintas e as sete oitavas além de evidenciar o fato de as quintas, acusticamente perfeitas da Escala Pitagórica, não se ajustarem às oitavas qualquer que seja o número de quintas ascendentes que se aplique a um som inicial. Matematicamente, explica-se este fato da seguinte maneira:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^m \neq \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Além do desajuste entre quintas e oitavas a Escala Pitagórica mostrou ter outro inconveniente quando confrontado com o desenvolvimento da composição musical no que se refere à transposição, pois, embora dividida em doze partes, estas partes são desiguais. Isso pode ser percebido de forma matemática.

Ao dividir-se o intervalo de oitava, definidos pelos comprimentos 1, correspondente ao som grave, e $\frac{1}{2}$, correspondente ao som agudo, em doze partes de modo que todos os intervalos sejam iguais entre si, o que se pretende é tornar a razão entre os comprimentos correspondentes a notas sucessivas constante.

Como toda nota da Escala Pitagórica é obtida por quintas e oitavas, pode se dizer que a expressão geral do comprimento neste sistema é dada por:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^m 2^n = \frac{2^{m+n}}{3^m}, \text{ com } m, n \in \mathbb{Z} \quad (3.3)$$

Se s_i , onde i varia de 1 a 11, são os comprimentos que dividem a oitava da forma pretendida, em partes iguais, então tem-se:

$$\frac{1}{s_1} = \frac{s_1}{s_2} = \dots = \frac{s_{11}}{\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

Agora, multiplicando-se todas as razões, resulta:

$$\frac{1}{s_1} \cdot \frac{s_1}{s_2} \cdot \frac{s_2}{s_3} \cdot \dots \cdot \frac{s_{11}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Logo, de 3.4 e 3.5, vem:

$$\left(\frac{1}{s_1}\right)^{12} = 2,$$

então devem existir $a, b \in \mathbb{Z}$ de forma que:

$$\left(\frac{2^{m+n}}{3^m}\right)^{-12} = 2 \quad (3.6)$$

Da expressão 3.6 pode-se concluir que:

$$m = 0 \quad (3.7)$$

e

$$-12n = 1 \quad (3.8)$$

Note que 3.8 vai contra a necessidade de a ser um inteiro. Por isso é impossível, pelo método de Pitágoras, dividir a escala em 12 intervalos iguais.

A escala pitagórica, por ser uma escala natural, tem uma grande vantagem sobre outras escalas no que diz respeito à entonação das quintas e quartas perfeitas, porém uma desvantagem muito grande é a afinação das terças que parecem desafinadas. Existem estudos que mostram que alguns violinistas preferem a escala pitagórica quando a obra requer uma ênfase maior nas quintas e quartas.

Como mostrado acima, se o ciclo de quintas for utilizado para se obter uma escala sem fazer o deslocamento das notas obtidas para a primeira oitava, isso resulta numa seqüência $a_m = \left(\frac{2}{3}\right)^m$, que é a relação entre o comprimento de duas cordas de sons obtidos sucessivamente. Portanto a freqüência do som obtido após se subir m quintas é $\left(\frac{3}{2}\right)^m$. Dividindo-se a escala em potências de 2 nunca será obtido um valor tal que $\left(\frac{3}{2}\right)^m = 2^n$. O problema na verdade consiste em quando m quintas estarão próximas o suficiente de n oitavas, ou seja, quando $\left(\frac{3}{2}\right)^m$ estará suficientemente próximo de 2^n . Para tanto primeiro observe $3^m = 2^{m \frac{\log 3}{\log 2}}$. De fato:

$$2^{m \frac{\log 3}{\log 2}} = 2^{m \log_2 3} = 2^{\log_2 3^m} = 3^m$$

Assim,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^m = \frac{2^{m \frac{\log 3}{\log 2}}}{2^m} = 2^{m\left(\frac{\log 3}{\log 2} - 1\right)} \quad (3.9)$$

Agora, por conta de 3.9, o problema fica equivalente a averiguar para quais valores de m o número $m\left(\frac{\log 3}{\log 2} - 1\right)$ fica próximo de um número inteiro n . Pode-se expressar o número irracional $\frac{\log 3}{\log 2}$ por meio de frações contínuas. Uma fração contínua regular é uma fração em que o numerador da parte fracionária do denominador sempre é 1. A título de exemplo considere a fração $\frac{17}{13}$ que pode ser expressa por meio de frações contínuas como segue:

$$\frac{17}{13} = 1 + \frac{4}{13} = 1 + \frac{1}{\frac{13}{4}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} \quad (3.10)$$

então, a representação de $\frac{17}{13}$ é: $[1, 3, 4]$, ou ainda:

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} = [1, 3, 4]$$

Para maiores detalhes sobre frações contínuas ver [1] e [9] . Pode-se mostrar que “dada a representação de um número irracional x em frações contínuas regulares, que é infinita, a seqüência de racionais resultantes dos truncamentos da fração contínua, que chamamos de *convergentes*, converge para x .”[4]. Para maiores detalhes ver[9],[15] . Assim, os convergentes da representação de $\frac{\log 3}{\log 2}$ serão aproximações para $\frac{n}{m}$, onde n é o número de oitavas e m o número de quintas.

A representação de $\frac{\log 3}{\log 2} = [0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, \dots]$ escrevendo esta representação em frações contínuas temos:

$$[0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, 23, \dots] = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2 + \frac{1}{23 + \dots}}}}}}}}}}}$$

Os convergentes da representação por frações contínuas para $\frac{\log 3}{\log 2}$ são os que seguem:

$$\begin{aligned}
[0] &= 0 \\
[0, 1] &= 0 + \frac{1}{1} = 1 \\
[0, 1, 1] &= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2} \\
[0, 1, 1, 2] &= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{3}{5} \\
[0, 1, 1, 2, 2] &= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \frac{7}{12} \\
[0, 1, 1, 2, 2, 3] &= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}}} = \frac{24}{41} \\
[0, 1, 1, 2, 2, 3, 1] &= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}}}}} = \frac{31}{53} \\
[0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5] &= 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}}}}} = \frac{179}{306}
\end{aligned}$$

Existe um teorema que diz que se x um número irracional, então todo convergente $\frac{a_n}{b_n}$ de x é uma aproximação ótima para x quando

$$\frac{a}{b} \neq \frac{a_n}{b_n}, \text{ com } 0 < b < b_n, \text{ implicar em } |b_n x - a_n| < |b x - a|, \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [9], aqui nos será interessante um corolário que decorre deste teorema que é o seguinte:

Corolário 3.1 *Sempre que $0 < b \leq b_n$ ocorre*

$$|b_n x - a_n| < |b x - a|,$$

onde x é o número que se quer aproximar.

Demonstração Como $\frac{a_n}{b_n}$ é um convergente de x , então

$$b_n \left| x - \frac{a_n}{b_n} \right| < b \left| x - \frac{a}{b} \right|,$$

e daí, como $0 < b \leq b_n$,

$$\left| x - \frac{a_n}{b_n} \right| < \left| x - \frac{a}{b} \right|.$$

■

Assim, pelo Corolário, para uma fração qualquer diferente de $\frac{7}{12}$, com numerador a qualquer e denominador b entre 1 e 12, tem-se:

$$\left| \left(\frac{\log 3}{\log 2} - 1 \right) - \frac{7}{12} \right| < \left| \left(\frac{\log 3}{\log 2} - 1 \right) - \frac{a}{b} \right|$$

O que pelo corolário e pelo teorema implica que $\frac{7}{12}$ é uma aproximação ótima para $\frac{\log 3}{\log 2}$. De modo que a melhor aproximação possível para 12 quintas é mesmo 7 oitavas.

Lembrando que o numerador do convergente é o número de oitavas e o denominador o número de quintas que aproximam estas oitavas e comparando-se as aproximações dadas pelos convergentes e os intervalos dados pelos instrumentos musicais, tem-se:

- O segundo convergente é $\frac{1}{1}$, o que equivaleria a aproximar uma oitava por um som um pouco mais agudo que uma quinta. Para se ter uma idéia, se a oitava fosse de $Lá_0$ a $Lá_1$, a aproximação de $Lá_1$ seria, neste caso, uma nota um pouco mais aguda que Mi_1 ;
- O terceiro convergente é $\frac{1}{2}$, o que equivale a aproximar uma oitava por duas quintas, em termos práticos, aproximar o intervalo de $Lá_0$ a $Lá_1$, pelo intervalo de $Lá_0$ a Si_1 ;
- O quarto convergente é $\frac{3}{5}$, equivalente a aproximação de $Lá_0$ a $Lá_3$ por cinco quintas, ou seja, $Lá_3$ seria aproximado por um som que está entre $Láb_3$ e $Lá_3$, o que ainda é bastante grosseiro tratando-se da percepção humana;
- O quinto convergente é o que dá uma aproximação mais satisfatória. A diferença do som obtido e do som a ser alcançado difere por algo em torno da quarta parte de um semitom, o que é quase imperceptível ao ouvido humano.

Ao se reduzir os sons obtidos aos limites de uma oitava, obtém-se uma divisão da escala em 12 partes. Embora o problema de dividir a oitava em 12 partes esteja parcialmente resolvido ainda não se conseguiu, desta maneira, dividir a oitava em *12 partes iguais*.

3.3 A Escala Temperada

A Escala Temperada, que possibilita a divisão da escala em doze partes iguais, só começou a ser pensada em finais do século *XVI*, por intermédio do matemático flamenco Simon Steven. Steven dividiu a escala em doze intervalos com uma aproximação bastante razoável. À mesma época, embora separadamente, Chou Tsai-Yu, príncipe chinês, conseguiu dividir a oitava com mais precisão, chegando a calcular com exatidão nove dos doze intervalos. Contudo, somente em 1691 esta escala foi devidamente fundamentada por Andreas Werkmeister, mais ou menos por esta mesma época começou-se a usar os logaritmos para determinar as notas musicais e os intervalos entre elas. Apesar de os intervalos de quinta e quarta não serem perfeitos, como na escala de Pitágoras, os novos intervalos não diferem muito. Bach compôs “O Cravo Bem Temperado”, uma obra que cobre todas as tonalidades, no modo maior e no modo menor, e popularizou o sistema acústico proposto por Werkmeister.

O Sistema Temperado só foi possível pelo uso dos números irracionais. O que se pretende ao dividir-se a escala em 12 partes iguais é fazer com que a razão entre as frequências de quaisquer duas notas consecutivas seja constante. Considerando novamente, de forma hipotética, o caso da divisão da oitava perfeita D_0 a D_1 . Então se quer tornar o intervalo entre duas notas consecutivas um número constante r que deve ser determinado.

$$\frac{f_2}{f_1} = r \Rightarrow f_2 = r f_1, \quad (3.11)$$

onde f_0 e f_1 são, respectivamente, as frequências de L_0 e $L_0\#$.

Agora, entre $L_0\#$ e S_1 , tem-se:

$$\frac{f_3}{f_2} = r \Rightarrow f_3 = r f_2,$$

de 3.11 tem-se o valor de f_3 .

$$f_3 = r(r f_1) = r^2 f_1,$$

Para Si_0 e $Dó_1$, cujas freqüências podem ser representadas por f_3 e f_4 , respectivamente.

$$\frac{f_4}{f_3} = r \Rightarrow f_4 = r f_3 = r(r^2 f_1) = r^3 f_1$$

Então, de modo geral, tem-se:

$$f_i = r^{i-1} f_1, i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq 13 \quad (3.12)$$

note que, i varia de 1 a 13, pois em uma oitava existem 12 intervalos e temos 13 notas.

Para $i = 13$, fica:

$$f_{13} = r^{12} f_1. \quad (3.13)$$

As freqüências em 3.13 são, respectivamente, as de $Lá_0$ e $Lá_1$, notas que diferem por uma oitava, ou seja, estão na razão 2 : 1. Então:

$$f_{13} = r^{12} f_1 \Rightarrow \frac{f_{13}}{f_1} = r^{12} \quad (3.14)$$

Como f_{13} e f_1 diferem por uma oitava, então $\frac{f_{13}}{f_1} = 2$. E por isso:

$$\frac{f_{13}}{f_1} = 2 = r^{12} \Rightarrow r = \sqrt[12]{2}, \quad (3.15)$$

Segue então de 3.15 que o fator que divide a oitava em doze partes iguais é $\sqrt[12]{2}$.

A Escala Temperada justifica-se pois com o desenvolvimento do sistema tonal e da composição musical, o uso de modulações foi freqüente e as escalas naturais ficaram com uso bastante restrito. A grande vantagem desta escala é a possibilidade de transposição, pois todos os intervalos entre as notas são iguais, o que não acontece nas escalas naturais como a pitagórica. O que o processo de divisão da oitava da escala temperada fez na verdade foi distribuir a diferença entre as notas das escalas naturais entre todos os graus, de forma a criar uma escala que tivesse o mesmo

espaçamento entre as notas. Esta divisão, embora bastante prática, não preserva as quintas e as quartas perfeitas das escalas naturais, além disso as terças maiores pitagóricas excedem as da escala temperada na razão aproximada de 1,0125, e as terças menores não as atingem de acordo com a mesma razão. Na Escala Temperada, o único intervalo que tem razão exatamente inteira é o de oitava os outros valores, como apresentado no apêndice A.1 são apenas aproximações.

Apêndice A

Apêndice

A.1 Conceitos Básicos de Teoria Musical

Neste apêndice estão contidos alguns conceitos básicos acerca dos conhecimentos de teoria musical requeridos para as discussões apresentadas neste trabalho. A princípio será feito um detalhamento das teclas de um piano, o que permite reconhecer intervalos musicais mais simples apenas com a seqüência de notas da série harmônica.

As teclas brancas de um piano são nomeadas, segundo padrões internacionais, sucessivamente com as letras *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* e *G*, que correspondem às notas *Lá*, *Si*, *Dó*, *Ré*, *Mi*, *Fá* e *Sol*, respectivamente, na notação latina. Essa seqüência se repete a cada grupo de 8 teclas brancas, chamado *oitava*. Por exemplo, se contarmos oito teclas a partir de uma nota que ao ser tocada emite a nota *Dó*, esta também será uma nota *Dó* que difere da primeira apenas pela altura (frequência) do som.

As teclas pretas representam as notas alteradas. As notas podem ser alteradas de duas maneiras: de forma ascendente com o sustenido (\sharp) e de forma descendente com o bemol (*b*). As notas alteradas podem ser nomeadas de dois modos diferentes. A tecla preta entre as notas *Lá* e *Sol*, pode ser chamada de *Lá \sharp* (*Lá* sustenido), ou seja, a nota que está um semitom acima da nota *Lá* ou ainda de *Sol b* (*Sol* bemol), a nota que está um semitom abaixo da nota *Sol*. Entre as notas *Si* e *Dó* e entre as notas *Mi* e *Fá* não existem teclas pretas pois estas notas estão separadas por apenas

um semitom, sendo assim, $Si\#$ corresponde a $Dó$, bem como $Dób$ corresponde a Si . De modo análogo, $Mi\#$ equivale a $Fá$, e $Fáb$ a Mi .

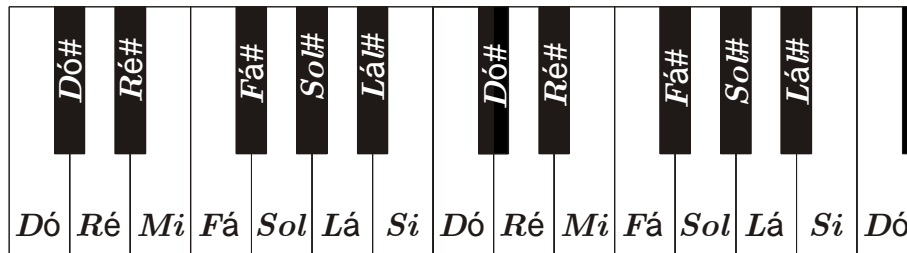


Figura A.1: Esquemática das teclas de um piano.

Duas notas adjacentes, sejam elas brancas ou pretas, estão separadas por um intervalo de um semitom. Um tom é um intervalo formado por dois semitons. Assim, o intervalo entre $Fá$ e Sol é de um tom, assim como o de Mi e $Fá\#$.

Na tabela a seguir, são apresentados os intervalos importantes para a construção da série harmônica, junto com o número de semitons que possuem e a razão entre as frequências das notas que formam o referido intervalo este intervalo.

<i>Intervalo</i>	<i>Número de semitons</i>	<i>Razão entre as Frequências</i>
<i>Oitava</i>	12	2:1
<i>Sétima Menor</i>	10	7:4
<i>Quinta Perfeita</i>	7	3:2
<i>Quarta Perfeita</i>	5	4:3
<i>Terça Maior</i>	4	5:4
<i>Terça Menor</i>	3	6:5
<i>Segunda Maior (um tom)</i>	2	-

O intervalo composto por duas notas que diferem por uma oitava sempre contém 12 semitons, uma quinta perfeita consiste de um intervalo que contenha 7 semitons, como entre $Fá$ e $Dó$, por exemplo, ou de Sol a $Ré$. As notas Si e $Fá$ não formam uma quinta perfeita pois entre estas notas existem apenas 6 semitons. De forma similar, Sol e $Dó$;e $Lá$ e $Ré$ são quartas perfeitas, pois contêm 5 semitons.

O conhecimento de escalas musicais permite determinar o intervalo entre duas notas de outra maneira. O nome dado ao intervalo é o número da nota mais alta da

escala a partir da primeira nota, também chamada de fundamental. Um intervalo de terça maior, por exemplo, é o intervalo formado pela primeira e terceira notas de uma escala maior, como entre *Dó* e *Mi*. De modo parecido, um intervalo de terça menor corresponde ao intervalo formado pela primeira e pela terceira notas de uma escala maior. Uma quarta perfeita contém a primeira e a quarta notas da escala, uma quinta perfeita, a primeira e a quinta notas. Os intervalos de quarta e quinta podem ser obtidos tanto das escalas maiores quanto das menores.

Considerações Finais

A Música, caracterizada pela subjetividade e sensibilidade; e a Matemática, calcada em rigorosos padrões e pouco mutável em sua essência, podem parecer, à primeira vista, áreas do conhecimento que pouco têm em comum. No entanto, com um estudo um pouco mais cuidadoso são percebidas semelhanças e certas afinidades entre as duas ciências. O processo de divisão do intervalo de oitava em doze partes iguais é um problema que remete os limites da Música aos da Matemática. Além disso, a música volta-se constantemente ao estudo de padrões que podem ser formalizados e expressos em linguagem matemática.

A teoria e a composição musicais exigem um raciocínio lógico e uma abstração de pensamento e contemplação muito semelhante ao pensar matemático; a teoria musical utiliza-se de uma simbologia elaborada, que em muitos momentos assemelha-se com a da Matemática, e a semelhança vai além da linguagem e da notação utilizada, conceitos matemáticos como simetria, periodicidade, proporção, discriminação, continuidade e sucessão estão presentes na música com significados muito parecidos, quando não iguais, com os que são utilizados na Matemática.

A Matemática mostra-se como importante ferramenta, para compreender como conceitos usados de maneira arraigada na Música, embora de modo intuitivo, são regidos por leis descritas matematicamente. O sistema temperado, revolução no sistema acústico e base da música do ocidente, até mais recentemente, a música digital e a construção dos sintetizadores, não teria sido construído sem os valorosos conhecimentos da Matemática não estivessem a serviço da Música.

Referências Bibliográficas

- [1] BARBOUR, J. M.. **Music and Ternary Continued Fractions**, American Mathematical Monthly, vol 55, n 9, pp. 545-555, 1988.
- [2] BENSON, D. **Mathematics and Music**, Department of Mathematical Sciences, Meston Building, King's College, University of Aberdeen, Scotland, 2006.
- [3] BERG, R. E.; STORK, D. G.. **The Physics of Sound**. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
- [4] BEZERRA, L. H. **Por que compomos com apenas 12 notas musicais?** Revista da Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina, número 6, pp. 45-55, 2009.
- [5] CHEDIAK, A. **Harmonia e Improvisação**. 15. ed. vol.1. Rio de Janeiro: Lumiar Editora, 1986.
- [6] FLETCHER N. H.; ROSSING T. D. **The Physics of Musical Instruments**, New York, Springer Study Edition, 1993.
- [7] GARLAND, T. H.; KAHN, C. V.. **Math and Music: Harmonious Connections**. 2. ed. New Jersey: Dale Seymour Publications, 1995.
- [8] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S.. **Física2**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC Livros Técnicos Científicos, 1996.
- [9] MOREIRA, C. G.. **Frações contínuas, representações de números e aproximações**. Disponível em <http://www.obm.org.br/eureka/artigos/fracoes.pdf>

- [10] MURRAY, R. S. **Análise de Fourier**, Schaum McGraw-Hill, São Paulo, 1979
- [11] RATTON M.. **Escalas musicais - quando a matemática rege a música**.
Disponível em <http://musiccenter.com.br/escalas.htm>
- [12] RODRIGUES J. F. **A Matemática e a Música** Revista Colóquio/Ciências,
n°23, 1999, pp.17-32.
- [13] ROSSING T. D.. **The Science Of Sound**. 2 ed. Northern Illinois University:
Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 1990.
- [14] SANCHES, C. F. M.. **A expansão do número
e em frações contínuas**. Disponível em
<http://www.famat.ufu.br/revista/revistadez2003/artigos/ArtigoCarolinaSalomao>
- [15] SCHECHTER, M.. **Tempered Scales and Continued Fractions**, American
Mathematical Monthly 87 (1), 40-42, 1980.