UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS

ANÁLISE DAS QUESTÕES SOBRE FUNÇÕES NO VESTIBULAR DA UFSC DE 2000 A 2006

Trabalho de Conclusão de Curso

Rafael Sales Lisbôa de Oliveira

Florianópolis - SC

Fevereiro - 2007

Rafael Sales Lisbôa de Oliveira

ANÁLISE DAS QUESTÕES SOBRE FUNÇÕES NO VESTIBULAR DA UFSC DE 2000 A 2006

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura
Departamento de Matemática
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Universidade Federal de Santa Catarina

Orientadora: Carmem Suzane Comitre Gimenez

Florianópolis - SC

Fevereiro - 2007

ANÁLISE DAS QUESTÕES SOBRE FUNÇÕES NO VESTIBULAR DA UFSC DE 2000 A 2006

Esta Monografia foi julgada adequada como Trabalho de Conclusão de Curso no Curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela banca Examinadora designada pela Portaria n^o 62/SCG/04.

Prof^a. Carmem Suzane Comitre Gimenez

Professora responsável pela disciplina

Banca Examinadora:

Prof^a. Carmem Suzane Comitre Gimenez

Orientadora

Prof^a Neri Terezinha Both Carvalho

Prof. José Análio de Oliveira Trindade

Florianópolis, 23 de fevereiro de 2007.

Aos meus pais que me apoiam incondicionalmente, e que amo muito.

Aos professores e examinadores desse trabalho: Carmem, Neri e José Análio.

À super professora e amiga Cláudia Silveira, pelas palavras de conforto e pela ajuda prestada.

Sobre tudo a DEUS, que me deu condições para chegar até aqui.

Sumário

Introdução

“Qual o segredo para passar no vestibular?” A resposta para essa pergunta é cobiçada por milhões de alunos que terminam o Ensino Médio, e com certeza, por milhares de professores que preparam esses alunos para o vestibular.

Foi para procurar a resposta para essa pergunta que escolhi como objeto principal do meu Trabalho de Conclusão de Curso, o estudo de algumas questões do vestibular da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) referentes aos anos de 2000 até 2006. Curiosamente, essa busca ocorreu no momento em que eu estava professor e não quando aluno.

Na verdade, esse despertar teve início no ano de 2002, ainda na graduação, quando trabalhava como bolsista do Projeto de Olimpíadas de Matemática na UFSC, momento em que mais me aproximei de atividades didáticas, tais como , correção e aplicação de provas, elaboração de lista de exercícios, bem como o treinamento para a Olimpíada dos alunos do Ensino Fundamental.

Posteriormente, em 2003, comecei a trabalhar como professor no Ensino Médio da rede pública de ensino. Já no ano seguinte iniciei meu trabalho no ensino privado, lecionando tanto no Ensino Fundamental como no Médio. Em Agosto desse mesmo ano, fui chamado para trabalhar com Terceirão[1] e Curso Pré-Vestibular[2].

Só então pude perceber a real necessidade de obter informações mais aprofundadas sobre o Vestibular da UFSC, (“dicas”, “macetes”, diferentes formas de resolução do mesmo exercício e sobretudo um bom domínio do conteúdo matemático). Desde então, continuei trabalhando nessa área até o presente momento e, com o intuito de

[1] Curso no qual o aluno recebe novos conteúdos, referentes à terceira série do Ensino Médio, e faz a revisão das séries anteriores, primeira e segunda série.

[2] Curso destinado à preparação para o vestibular

aprofundar ainda mais meus conhecimentos nesse ramo, resolvi fazer um estudo mais detalhado sobre o assunto.

Para tanto, faremos uma análise das questões que têm como tema principal o assunto **funções**, cujo objetivo é aperfeiçoar o desenvolvimento do conteúdo, de maneira prática porém sem perder o rigor matemático.

Para a confecção dessa análise, utilizaremos uma teoria da Didatica da Matemática de Ives Chevallard. Essa teoria propõe a partir da resolução de problemas, organizar a construção do conhecimento matemático, possibilitando ao aluno a resolução dos mais variados tipos de problemas, sejam eles de ordem científica ou cotidiana.

Esse trabalho apresenta-se dividido em três capítulos. No primeiro, faremos uma apresentação, explicando os procedimentos para a adequada resolução das questões do Vestibular da UFSC.

A fim de esclarecer possíveis dúvidas, no segundo capítulo listaremos e exemplificaremos os principais resultados e definições sobre funções.

Por fim, no terceiro capítulo faremos a análise propriamente dita das questões. Inicialmente, apresentaremos uma listagem dos exercícios selecionados e devidamente resolvidos. Em seguida, com o intuito de organizar os dados, elaboraremos uma tabela composta de enunciados e detalhes desmistificadores sobre a resolução dos mesmos.

Finalmente, esperamos que esse estudo possa contribuir positivamente como uma ferramenta de trabalho para tornar acessível a linguagem do vestibular tanto ao corpo docente quanto ao discente.

Capítulo 1

Sobre o vestibular da UFSC

Para obter um bom desempenho no vestibular, faz-se necessário que o candidato conheça a estrutura da prova. Estas informações estão contidas no “Guia do Vestibulando”oferecido pela COPERVE (Comissão Permanente do Vestibular) todos os anos, no ato da inscrição ou, ainda, disponibilizado na Internet. O guia é fundamental porque traz todas as informações necessárias para a realização das provas, fazendo, com que os candidatos sintam-se seguros e tranqüilos desde o momento da inscrição até a realização das provas. Afim de buscar um processo seletivo mais adequado à realidade atual, o guia é reformulado a cada ano, sendo passível a mudanças de caráter geral. Para a COPERVE, isso significa incentivar a participação de todos, viabilizando inscrições tanto do ensino público como do privado.

A trajetória do Vestibular da UFSC teve início em 1970. Mas foi a partir de 1982 que foi instituída a questão múltipla escolha (somatório). Desde então, é este o tipo de questão que predomina na prova, sendo inserida também questões abertas e discursivas interdisciplinares envolvendo, no primeiro dia conteúdos de língua portugesa; no segundo, Matemática e/ou Geografia e/ou Biologia; e , no terceiro dia, Física e/ou Química e/ou História.

1.1 Sobre as questões

1.1.1 Questões de múltipla escolha ("somátório")

As questões de proposições múltiplas conterão, no máximo sete proposições identificadas pelas números $01, 02, 04, 08, 16, 32$ e 64. Para responder tais questões, o candidato deverá somar os números que indentificam as proposições verdadeiras, assinalando a soma no cartão-resposta, que deverá ser um número natural compreendido entre 01 e 99, incluindo esses valores. É válido observar que, devido ao fato de possuir diversos itens, este tipo de questão possibilita a explanação de diversos conteúdos.

Quanto a pontuação, tais questões seguirão a seguinte fórmula:

Se $NPC > NPI$

então $P = \frac{NP-(NTPC-(NPC-NPI))}{NP}$

Senão $P = 0,00$

Em que:

P- Pontuação do candidato na questão

NP- Número de proposições da questão

$NTPC$- Número total de proposições corretas

NPC- Número de proposições corretas assinaladas pelo candidato

NPI- Número de proposições incorretas assinaladas pelo candidato

A pontuação de cada questão será considerada com duas casas decimais, observadas as normas de arredondamento.

1.1.2 Questões abertas

As questões abertas, ao contrário das de múltipla escolha, são aquelas que não permitem a verificação de afirmações, ou seja, o aluno deverá por si só encontrar a solução, sendo esta um número natural compreendido entre 01 e 99, incluindo esses valores. No referente a pontuação, deverá estar restrita aos valores zero ou um.

1.1.3 Questões discursivas

As questões discursivas são aquelas em que o aluno deverá dissertar sobre o tema dado pelo vestibular, podendo envolver até três eixos temáticos. Nesse tipo de questão, o aluno terá entre 5 e 15 linhas para redigir seu texto, que será avaliado de acordo com os seguintes itens:

i domínio do conteúdo;

ii capacidade de expressar-se com clareza;

iii capacidade de organizar idéias;

iv capacidade de síntese

v nível de informação e de argumentação ;

vi capacidade de interpretar dados e fatos;

vii capacidade de estabelecer relações;

viii correlação com fatos do cotidiano e da atualidade

Estas questões serão pontuadas de zero a dois, admitindo-se acertos parciais.

1.2 Programa da disciplina

De acordo com a COPERVE,

> A prova de Matemática visa a avaliar o domínio da linguagem básica e a compreensão dos conceitos fundamentais da Matemática, assim como sua aplicação em situações-problema diversas, o relacionamento entre eles e com outras áreas de conhecimento. Assim sendo, as questões serão elaboradas de forma a exigir a capacidade de:
> - ler e interpretar textos temáticos;
> - ler, interpretar e utilizar as diversas representações matemáticas;
> - reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando

procedimentos associados às diferentes representações;

- transcrever mensagens matemáticas da liguagem corrente para a linguagem simbólica e vice-versa;

- exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia adequada;

- ler, compreender, interpretar e resolver situação-problema;

- utilizar o pensamento dedutivo e indutivo, o pensamento numérico, o pensamento algébrico, o pensamento geométrico, o raciocínio proporcional, o raciocínio combinatório, o raciocínio estatístico e probabilístico e a competência métrica, entre outros, para resolver problemas e estabelecer conexões entre as várias áreas dentro da própria Matemática;

- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e outras áreas de conhecimento;

- aplicar conhecimentos e métodos matemáticos a situações diversas e outras áreas de conhecimento.

O programa de Matemática compreende os seguintes conteúdos:

1- Conjuntos Numéricos

2- Funções

3- Seqüências e Progressões

4- Análise Combinatória

5- Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

6- Trigonometria

7- Polinômios e Equações Algébricas

8- Geometria Plana

9- Geometria Espacial

10- Geometria Analítica

Para o presente trabalho, aprofundamo-nos apenas no item 2 relativo a *Funções*, que se subdivide nos seguintes tópicos:

i Definição, notação, domínio, contradomínio, e imagem de uma função. Gráficos. Função par e função ímpar. Funções crescentes e decrescentes. Função definida por mais de uma sentença. Composição e inversão de funções.

ii Função linear e função afim: expressão algébrica, construção e interpretação de gráficos: resoluções algébrica e gráfica de equações e inequações do primeiro grau.

iii Função quadrática: expressão algébrica; construção e interpretação de gráficos; resoluções algébrica e gráfica de equações e inequações do segundo grau.

iv Funções exponeciais e funções logarítmicas: expressão algébrica; construção e interpretação de gráficos; propriedades; resoluções algébrica e gráfica de equações e inequações exponeciais e logarítmicas.

Capítulo 2

Funções

Nesse capítulo, faremos listagem das principais definições e resultados sobre funções. Nosso objetivo não é exporar o tema de forma didática, mas dar subsídios ao leitor para possíveis esclarecimentos na resolução das questões.

2.1 Funções, Domínio, Contradomínio e Imagem

Definição: Dados dois conjuntos $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$; uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é uma relação onde cada elemento de $\mathbb{A}$ está associado a um único elemento de $\mathbb{B}$.

Trataremos aqui de funções reais de variável real, isto é, funções cujo domínio e contradomínio são subconjunto de $\mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{A}$ é chamado de domínio de f e será anotado $D_{(f)} = \mathbb{A}$.

Quando não explicitado, o domínio de uma função é o "maior"conjunto para o qual é possível definir $f(x)$, isto é, o conjunto de todos os números reais x para os quais existe $f(x)$.

O conjunto $\mathbb{B}$ é chamado de contradomínio de f e será anotado $CD_{(f)} = \mathbb{B}$.

Chamaremos de imagem de f o conjunto $Im_{(f)} = \{y \in \mathbb{B} / f(x) = y, x \in \mathbb{A}\}$.
Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1:Considere os conjuntos $\mathbb{A} = \{-3, -1, 0, 2\}$ e $\mathbb{B} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B} / y = x + 2\}$

Podemos dizer que $R : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é uma função pois cada elemento de $\mathbb{A}$ está associado a um único elemento de $\mathbb{B}$. Podemos ainda representar por meio de uma tabela.

x	y
-3	-1
-1	1
0	2
2	4

Note que :

$$D_{(R)} = \{-3, -1, 0, 2\}$$

$$CD_{(R)} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$Im_{(R)} = \{-1, 1, 2, 4\}$$

Exemplo 2: Sejam $\mathbb{A} = \{16, 25\}$ e $\mathbb{B} = \{-5, -4, 4, 5\}$ e $R : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ tal que $y^2 = x$, com $x \in \mathbb{A}$ e $y \in \mathbb{B}$. Vejamos que R não é função observando a tabela:

x	y
16	-4
16	4
25	5
25	-5

Existem elementos em $\mathbb{A}$ (domínio) que se correspondem com mais de um elemento de $\mathbb{B}$(contradomínio).

Exemplo 3: Considere agora $\mathbb{A} = (-1, 1)$ e $\mathbb{B} = \mathbb{R}$ e $R : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ tal que $y = \frac{1}{x}$. Essa relação não é uma função pois existe um elemento no domínio que não está associado a nenhum elemento do contradomínio. Neste caso, o zero, que não possui imagem.

Observando os exemplos anteriores fica evidente que uma função é formada por três elementos: Domínio, Contradomínio e a lei que associa os elementos.

Exemplo 4: Considere a função $f(x) = \frac{x}{x+1}$.
Como não está explícito, o domínio, de f será $\mathbb{R} - \{-1\}$, pois:

Devemos ter:

$$x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

2.2 Igualdade de Funções

Definição: Sejam $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ e $g : \mathbb{K} \to \mathbb{M}$, duas funções reais. Dizemos que $f = g$, se e somente se, $\mathbb{A} = \mathbb{K}$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{A} = \mathbb{K}$. Em outras palavras, as funções devem ter mesmo domínio, e suas imagens devem ser iguais em cada elemento do domínio.

Exemplo 5: Considere $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = 3x - 1$.

Note que apesar de ter a mesma lei de associação as funções f e g não são iguais pois têm domínios diferentes. Observe que, por exemplo, $f(-1)$ não existe e no entanto $g(-1) = -4$.

2.3 Gráficos

Uma função pode ser representada de diversas maneiras,(tabela, diagrama de flechas, gráficos...). vejamos o que é o gráfico de uma função.

Definição: O gráfico de uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é o conjunto

$$G_{(f)} = \{(x, y) \in \mathbb{A} \times \mathbb{B} / f(x) = y\}$$

Temos aqui, alguns gráficos representados no plano cartesiano:

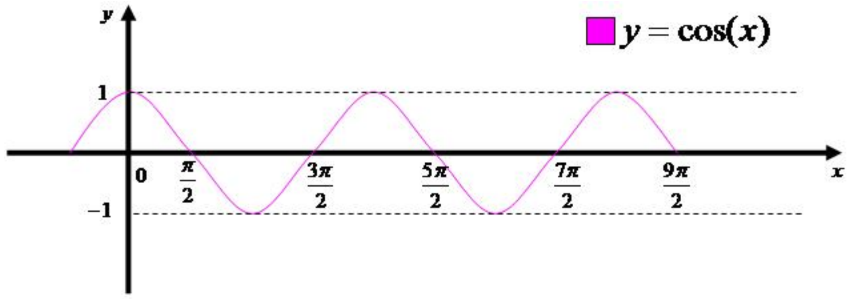


Figura 2.1:

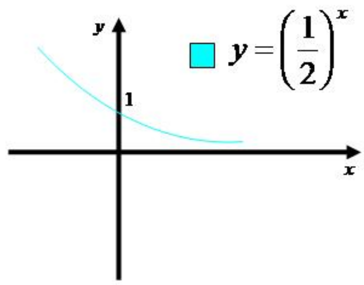


Figura 2.2:

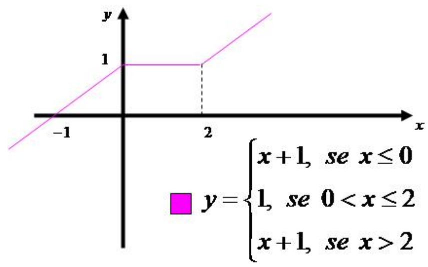


Figura 2.3:

2.4 Crescimento e Decrescimento

Definição: Uma função $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é crescente se e somente se, para todo $a, b \in \mathbb{A}$ tem-se

$$a > b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

f é decrescente se e somente se, para todo $a, b \in \mathbb{A}$ tem-se

$$a > b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

Observação: Lembre-se que $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ são subconjuntos de $\mathbb{R}$, onde está definida a relação de ordem.

Exemplo 6: Considere $f(x) = 4x - 2$. Note que $D_{(f)} = \mathbb{R}$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > b$ temos:

$f(a) = 4a - 2 > 4b - 2 = f(b)$ logo $f(a) > f(b)$ e f é crescente.

Exemplo 7: Considere $h(x) = -3x + 4$. Novamente temos $D_{(f)} = \mathbb{R}$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > b$ temos:

$h(a) = -3a + 4 < -3b + 4 = h(b)$ logo $h(a) < h(b)$ e h é decrescente.

Teorema: Seja $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ uma função tal que $f(x) = ax + b$.

i. f é crescente se, e somente se, $a > 0$

ii. f é decrescente se, e somente se, $a < 0$

Demonstração:

(i) $(\to)$

Hip.: $f(x) = ax + b$ é crescente

Tese: $a > 0$

Por hipótese, se $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$, isto é:

$$ax_1 + b < ax_2 + b$$

$$ax_1 < ax_2$$

$$ax_2 - ax_1 > 0$$

$$a(x_2 - x_1) > 0$$

Como $x_1 < x_2$, $x_2 - x_1 > 0$ e para o produto ser positivo devemos ter $a > 0$.

$(\leftarrow)$

Hip.: $a > 0$

Tese: $f(x) = ax + b$ é crescente

Sejam x_1, x_2 tais que $x_1 < x_2$. Como $a > 0$, temos:

$$ax_1 < ax_2$$

$$ax_1 + b < ax_2 + b$$

Logo, $f(x_1) < f(x_2)$ e f é crescente.

$(ii.)$ analogamente provamos $(ii.)$

2.5 Injetividade, Sobrejetividade e Bijetividade

Definições: Função Injetora: Seja $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ uma função.

f será uma função injetora se e somente se:

$\forall a, b \in \mathbb{A}$, se $a \neq b$ então $f(a) \neq f(b)$

o que equivale dizer que:

f será uma função injetora se e somente se:

$\forall a, b \in \mathbb{A}$, se $f(a) = f(b)$ então $a = b$

Função Sobrejetora: Seja $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ uma função.

f será uma função sobrejetora se e somente se a imagem de f for igual ao seu contradomínio. Simbolicamente temos:

$\forall y \in \mathbb{B}$, $\exists x \in \mathbb{A}$ tal que $f(x) = y$

Função Bijetora: Seja $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ uma função.

f será uma função bijetora se e somente for injetora e sobrejetora.

Exemplo 8: Considere a função $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 2x - \pi$. A função h é injetora pois se $a, b \in \mathbb{R}$ e $h(a) = h(b)$ tem-se $2a - \pi = 2b - \pi$, logo $a = b$.

A função h também é sobrejetora, vejamos por que:

Seja $y = 2x - \pi$ então podemos escrever:

$$x = \frac{y}{2} - \frac{\pi}{2} \text{ e}$$
$$h(x) = f(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{2}) = 2(\frac{y}{2} - \frac{\pi}{2}) - \pi = y.$$

Logo, para todo $y \in \mathbb{R}$ existe $x = \frac{y}{2} - \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$ tal que f(x)=y. Consequentemente será também bijetora já que é injetora e sobrejetora.

Exemplo 9: Considere agora a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Note que f não é injetora, pois existem $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = f(b)$ e $a \neq b$. Por exemplo, $f(2) = 0 = f(3)$ e $2 \neq 3$. Também não é sobrejetiva pois sua imagem é $(-\frac{1}{4}, \infty]$ que é diferente de $\mathbb{R}$. Portanto não será bijetora.

2.6 Função Par e Função Ímpar

Definição: Seja f uma função.

i. f será par, se, e somente se, $f(x) = f(-x)$ para todo x pertencente ao domínio de f.

ii. f será ímpar, se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$ para todo x pertencente ao domínio de f.

Observação[1]**:** Uma função par tem seu gráfico simétrico ao eixo das ordenadas. Já a função ímpar tem seu gráfico simétrico à origem do sistema cartesiano.

Observação[2]**:** Existe função que não é par nem ímpar, por exemplo $f(x) = 2x + 1$.

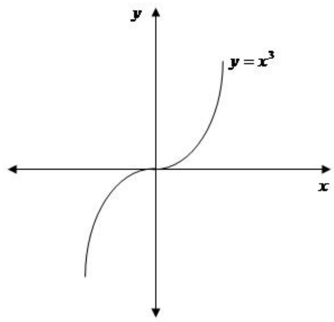
Exemplo 10: Consideremos a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$. Note que para todo x real temos:

$$f(x) = x^3$$

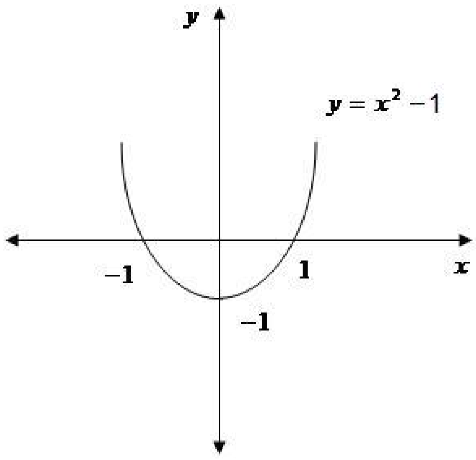
$$f(-x) = (-x) = -x^3$$

Logo, $f(-x) = -f(x)$ ou seja x e $-x$ tem imagens opostas.

Observe que o gráfico de f tem simetria em relação à origem , como citado anteriormente:



Exemplo 11: Consideremos agora a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 1$. Temos, nesse caso, uma função par, pois $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$. Agora é possível notar a simetria em relação ao eixo das abscissas.



2.7 Composição de Funções

Definição: Sejam $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ e $g : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{C}$ funções tais que $Im_{(f)} \subset D_{(g)}$. A função composta de g com f é definida como a função $g \circ f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ e podemos escrever:$g \circ f(x) = g(f(x))$.

Exemplo 12: Sejam $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x^2 - 1$.Vamos definir $g \circ f$ e $f \circ g$

i. Como $Im_g = [-1, \infty \subset \mathbb{R} = D_f$, $f \circ g = f(g(x)) = 2(x^2 - 1) + 1 = 2x^2 - 1$, temos $f \circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \circ g = 2x^2 - 1$

ii. Como $Im_f = \mathbb{R} = D_g$, $g \circ f = g(f(x)) = (2x+1)^2 - 1 = 4x^2 - 4x + 1 - 1 = 4(x^2 - x)$, temos $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g \circ f = 4(x^2 - x)$

Note que $f \circ g \neq g \circ f$, mas pode ocorrer $f \circ g = g \circ f$

Exemplo 13: Considere agora as funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$ e $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = ln(x)$. Neste caso temos $Im_{(f)} = \mathbb{R}$ e $D_{(g)} = \mathbb{R}_+^*$, não é possível definir a composta $g \circ f$. Contudo podemos fazer $f \circ g$. Teremos $f \circ g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f \circ g(x) = f(g(x)) = ln(x) + 1$.

2.8 Função Inversa

Definição: Seja $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ uma função. Se existe $g : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$ tal que $f \circ g = I_{d_B}$ e $g \circ f = I_{d_A}$, então a função g é chamada de inversa de f e escrevemos f^{-1}.

Teorema: Uma função é inversível se, e somente se, é bijetora.

Demonstração:

(i) $(\rightarrow)$

Hip.: f é inversível

Tese: f é bijetora

Seja $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ uma função. Por hipótese, se f é inversível então existe $g : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$ tal que $(g \circ f)(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{A}$ e $(f \circ g)(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{B}$. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{A}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Como $f(x_1)$ e $f(x_2)$ estão no domínio da função g, temos que:

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$$

$$I_{d_A}(x_1) = I_{d_A}(x_2)$$

$$x_1 = x_2$$

(ii) f é sobrejetora pois:

Seja $y \in \mathbb{B}$. Como y é um elemento do domínio de g, temos que existe $x \in \mathbb{A}$ tal que

$g(y) = x$. Como x pertence ao domínio de f, temos que $f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = y$.

De (i) e (ii) temos que f é bijetora.

(i) $(\longleftarrow)$

Hip.: f é bijetora

Tese: f é inversível

Seja $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ uma função. Seja g a relação inversa de f, ou seja, $g = \{(y, x) \in \mathbb{B} \times \mathbb{A} / y = f(x)\}$. Mostraremos que g é uma função e que $f \circ g = I_{d_B}$ e $g \circ f = I_{d_A}$.

(i) g é função pois, sejam $y_1 = y_2$ elementos em $\mathbb{B}$. Como f é sobrejetora, existem $x_1, x_2 \in \mathbb{A}$ tal que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Assim, (y_1, x_1) e (y_2, x_2) pertencem á relação g. Como $y_1 = f(x_1) = y_2 = f(x_2)$, e f é injetora, temos que $x_1 = x_2$. Então os pares (y_1, x_1) e (y_2, x_2)são iguais e g é função.

(ii) Sejam $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ e $g : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$ tais que $y = f(x)$ então $x = g(y)$ (g é a relação inversa).

Analisando $g \circ f$ temos:

Seja $x \in \mathbb{A}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$, portanto $g \circ f = I_{d_A}$.

Agora analisando $f \circ g$ temos:

Seja $y \in \mathbb{B}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = y$, portanto $f \circ g = I_{d_B}$, portanto $f \circ g = I_{d_B}$.

De (i) e (ii), temos que f é inversível.

Exemplo 14: Encontre se possível a inversa da função $f(x) = x + 3$.

A função é bijetora, logo, admite inversa. Procuramos uma função f^{-1} tal que: $(f \circ f^{-1})(x) = x$ e $(f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Portanto teremos:

$$(f \circ f^{-1}) = f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x) + 3 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 3(-1)$$

Exemplo 15: Vamos verificar se $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ cujo domínio é $D_(f) = \mathbb{R} - \{3\}$ é a inversa de $g(x) = \frac{3x-1}{x-2}$ cujo domínio é $D_{(g)} = \mathbb{R} - \{2\}$.

Devemos ter:

$(f \circ g)(x) = x$ e $(g \circ f)(x) = x$

Vejamos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{2g(x) - 1}{g(x) - 3} = \frac{2(\frac{3x-1}{x-2}) - 1}{(\frac{3x-1}{x-2}) - 3} = \frac{6x - 2 - x + 2}{3x - 1 - 3x + 6} = \frac{5x}{5} = x$$

e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{3f(x) - 1}{f(x) - 2} = \frac{3(\frac{2x-1}{x-3}) - 1}{(\frac{2x-1}{x-3}) - 2} = \frac{6x - 3 - x + 3}{2x - 1 - 2x + 6} = \frac{5x}{5} = x$$

Portanto g é inversa de f.

Observação: O cálculo da inversa pela definição pode parecer menos eficiente que a conhecida "regra prática"de "isoloar o x e trocar x por y". Esta regra nada mais é do que o cálculo da inversa quando já sabemos que ela existe. Podemos observar no exemplo 14 que a expressão (1) é própria regra prática.

Capítulo 3

Análise das Questões

Com o objetivo de conhecer quais os aspectos relativos ao tema "funções"são explorados no vestibular, trataremos, nesse capítulo, da análise das questões extraídas do vestibular da UFSC, apoiados na **Teoria Antropológica do Saber** de Ives Chevallard que propõe a partir da resolução de problemas, identificar o conhecimento ultilizado, possibilitando ao aluno a resolução dos mais variados tipos de problemas, sejam eles de ordem científica ou cotidiana. Dessa forma, a organização na resolução de exercícios pode propiciar ao aluno um acúmulo de informações valiosas (definições, teoremas, propriedades, técnicas de resolução de exercícios, entre outros), que podem posteriormente, ser utilizadas em novas situações.

3.1 Quadro Teórico

A palavra "matemática"vem do grego: *mathema*, que significa "aprendizagem". Ensinar Matemática deveria ser, portanto, ensinar a aprender, ou seja o professor deve estimular o aluno no desenvolvimento de sua criatividade e capacidade na resolução de exercícios, a fim de que este adquira o costume da investigação. Assim, a Matemática teria conseguido um grande avanço, que é o de fazer com que o aluno tenha capacidade de buscar o saber e interligá-lo à realidade que o cerca.

Segundo Chevallard(ver [1]), um saber não vive isoladamente, pois cada saber tem ligação com outros saberes de uma determinada instituição e desempenha alguma função. Em nosso trabalho, o objeto matemático são algumas questões do vestibular da UFSC que tratam de "funções", e a instituição, o próprio vestibular. Foram escolhidas as questões que tratavam explicitamente de funções; nesta escolha pudemos perceber que questões relativas a vários outros tópicos continham a nação de função. Por exemplo, uma questão do cálculo de determinante (determinante é uma função), cálculo de área, determinação termos em seqüências numéricas, entre outros.

Para Chevallard, uma organização matemática de um determinado objeto matemático em uma determinada instituição pode ser compreendido se conhecemos as tarefas, a técnica, a tecnologia e a teoria que têm lugar nesta instituição.

A **tarefa** é a ordem, a ação, a pergunta que o enunciado traz (palavras como determine, encontre, calcule, evidenciam esse termo). Já **técnica** é a forma utilizada para realizar a tarefa; é a maneira pela qual se chega à solução das questões. **Tecnologia** é o que garante que a técnica funciona (trata-se das definições, teoremas, corolários, propriedades, entre outros, que validam a técnica). Por fim, temos a **teoria** que é o maior suporte em questão, e que sustenta a tecnologia; aqui fazemos referência aos diversos ramos da Matemática (Álgebra, Geometria, Análise Matemática).

3.2 Listagem das Questões com Resolução

Com o intuito de analisar minuciosamente as questões selecionadas, será feita, anteriormente, a resolução de cada uma delas.

Para tanto, utilizaremos técnicas justificadas pelas definições já listadas e exemplificadas neste trabalho. Porém, é válido observar que, muitas vezes, na tentativa de facilitar a resolução de um exercício, é usado (pelo professor) o que é chamado de **macete** [1]. Isso é um equívoco, pois, na verdade, toda e qualquer forma de resolução de um exercício é justificada através de uma propriedade, teorema ou definição. Portanto, na Matemática, o termo "macete", em seu sentido usual, não é adequado, uma vez que o que ocorre é a utilização de **técnicas**.

1. **(UFSC-2000) Sejam as funções $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ definida para todo x real e $x \neq 1$ e $g(x) = 2x + 3$ definida para todo x real. Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S).**

[1] Recurso de emergência adotado para conseguir algo difícil. Ver[7]

01. $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ **para todo** $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$.

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

$f(\frac{1}{x}) = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{\frac{1+x}{x}}{\frac{1-x}{x}} = \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$.

02. O domínio da função $f \circ g$ **(f composta com g) é** $D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{2x+3+1}{2x+3-1} = \frac{2x+4}{2x+2} = \frac{x+2}{x+1}$. **Temos então que o domínio de** $f \circ g$ **é** $\mathbb{R} - \{-1\}$

04. O valor de $g(f(2))$ **é igual a** $\frac{4}{3}$.

Resolução: **Proposição Falsa, pois:**

$f(2) = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$

$g(3) = 2 \times 3 + 3 = 6 + 3 = 9$, **logo** $g(f(2)) = 9$

08. A função inversa de g **é definida por** $g^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Isolando x **temos:**

$$y = 2x + 3$$

$$2x = y - 3$$

$$x = \frac{y-3}{2}$$

Como históricamente chamamos de x **a variável independente, fazemos:**

$g_{-1} = \frac{x-3}{2}$

16. A reta que representa a função g **intercepta o eixo das abscissas em** $(-\frac{3}{2}, 0)$.

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Para encontrar onde o gráfico de g **intercepta o eixo das abscissas, basta encontrar o "zero"da função:**

$$f(x) = 2x + 3$$

$$2x + 3 = 0$$

$$2x = -3$$
$$x = -\frac{3}{2},$$

portanto o gráfico intercepta o eixo das abscissas no ponto $(-\frac{3}{2}, 0)$**.**

32. A função f **assume valores estritamente positivos para** $x < -1$ **ou** $x > 1$**.**

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Como f **é uma função racional, vamos fazer o estudo de seu sinal algébrico; para tanto, fazemos o estudo do sinal algébrico de** $x + 1$ **e** $x - 1$

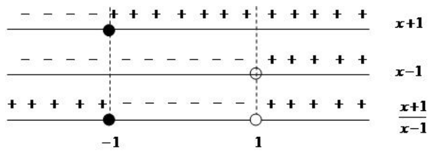


Figura 3.1: Sinal algébrico de f

Portanto f **assume valores estritamente positivos para** $x < -1$ **ou** $x > 1$**.**

2. (UFSC-2000) O gráfico abaixo representa temperatura T(C) x tempo t(h).

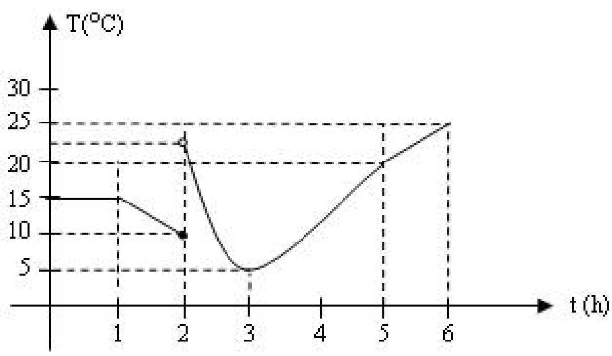


Figura 3.2: $T(c)Xt(h)$

01. **No intervalo entre $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ a temperatura diminuiu numa taxa constante.**

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Como no intervalo entre $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$, o gráfico é de uma função polinomial do primeiro grau decrescente, $(f(x) = ax+b)$ a temperatura diminui a uma taxa constante.

02. **A função que determina a temperatura entre $t_1 = 5$ e $t_2 = 6$ é do tipo $y = ax + b$, com $a < 0$.**

Resolução: **Proposição falsa, pois:**

Como a função é crescente devemos ter o coeficiente a maior do que zero.

04. **A temperatura diminuiu mais rapidamente no intervalo entre $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ do que no intervalo entre $t_2 = 2$ e $t_3 = 3$.**

Resolução: **Proposição falsa, pois:**

No intervalo entre $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ a variação de temperatura é de 5^oC, já no intervalo entre $t_2 = 2$ e $t_3 = 3$, a variação é de mais de 15^oC.

08. **A temperatura máxima ocorreu no instante $t = 2$.**

Resolução: **Proposição falsa, pois:**

A maior temperatura ocorre em $t = 6$, (25^oC)

16. **A temperatura mínima ocorreu no instante $t = 3$.**

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Por interpretação gráfica é possível perceber que temos temperatura mínima de 5^oC para $t = 3$.

3. (UFSC-2001) Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S).

01. **O domínio da função $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x-10}}{x-6}$ é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2$ ou $x \geq 5\} - \{6\}$.**

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Como $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x-10}}{x-6}$, para que exista $f(x)$ devemos ter:

$$\sqrt{x^2 - 3x - 10} \geq 0 \qquad (1)$$

e

$$x - 6 \neq 0 \qquad (2)$$

Agora verificaremos as restrições em (1) e em (2).

Em (1) devemos ter $x^2 - 3x - 10 \geq 0$. Fazendo o estudo do sinal algébrico temos:

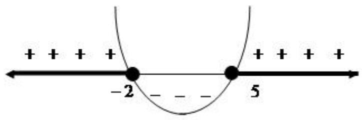


Figura 3.3:

Para (2) devemos ter $x - 6 \neq 0$, portanto teremos:

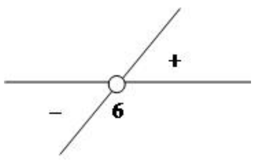


Figura 3.4:

Unindo essas informações teremos:

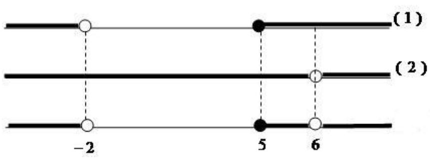


Figura 3.5:

Logo o domínio de f é: $D_f = \{x \in \mathbb{R}/x < -2 \quad ou \quad x \geq 5\} - \{6\}$

02. A função inversa da função $g(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ é definida por $g^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x-2}$.

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Para encontrar a inversa basta trocar x por y e isolar y:

$$g(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

$$y = \frac{2x-1}{x-3}, \textbf{ trocando } x \textbf{ por } y \textbf{ temos:}$$

$$yx - 3y = 2x - 1$$

$$yx - 2x = 3y - 1$$

$$(y-2)x = 3y - 1$$

$$x = \frac{3y-1}{y-2}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x-2}$$

04. Sejam h e k , duas funções, dadas por $h(x) = 2x - 1$ e $k(x) = 3x + 2$. Então $h(k(1))$ é igual a 9.

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

$k(1) = 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5$

$h(5) = 2 \times 5 - 1 = 10 - 1 = 9$

Logo $h(k(1)) = 9$.

08. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 2$, é uma função decrescente.

Resolução: **Proposição falsa, pois:**

Como $f(x) = x + 2$ é uma função polinomial do primeiro grau cujo coeficiente angular é igual a 1, portanto positivo, f é crescente.

16. A função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 + 1$, é uma função par.

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Uma função é par se $f(x) = f(-x)$. Nesse caso, teremos:

$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$**, logo f é par.**

32. O conjunto imagem da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = |x^2 - 4x + 3|$ é $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq -1\}$.

Resolução: **Proposição falsa, pois:**

A função h é uma composição de funções (uma função modular e uma polinomial). Por ser definida como módulo de uma expressão o menor valor que h pode assumir é zero. Dessa maneira sua imagem

não pode ser $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} | y \geq -1\}$.

4. (UFSC-2002) Marque a(s) proposição(ões) CORRETA(S).

   01. O conjunto imagem da função $g(x) = cosx$ é o conjunto dos números reais.

       Resolução: Proposição falsa, pois:

       O conjunto imagem da função cosseno é $[-1, 1]$.

   02. Dadas as funções $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$, então o domínio da composta $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$, é $Dom(g \circ f) = [0, +\infty)$.

       Resolução: Proposição verdadeira, pois:

       Por ser $g \circ f$ a função considerada, aplicaremos f em g. Dessa maneira a origem dos elementos nos quais aplicaremos $g \circ f$, é o domínio de f. Como não existe restrição em g, o domínio de $g \circ f$ será o mesmo de f, ou seja, $[0, +\infty)$.

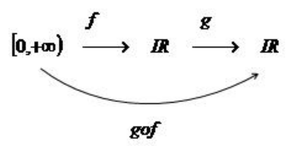


Figura 3.6:

   04. Se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é uma função injetora e o conjunto $\mathbb{A}$ possui uma infinidade de elementos, então $\mathbb{B}$ (necessariamente) possui uma infinidade de elementos.

       Resolução: Proposição verdadeira, pois:

       Como f é injetora, elementos diferentes do domínio possuem imagens diferentes. Dessa forma, se o domínio de f tem uma infinidade de elementos seu contradomínio também o terá.

   08. A função $g(x) = \frac{x^2}{2}$, $(x > 0)$ fornece a área do triângulo formado pelo gráfico da função $f(x) = x$, o eixo das abscissas e a reta vertical que passa pelo ponto $(x, 0)$.

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Graficamente temos:

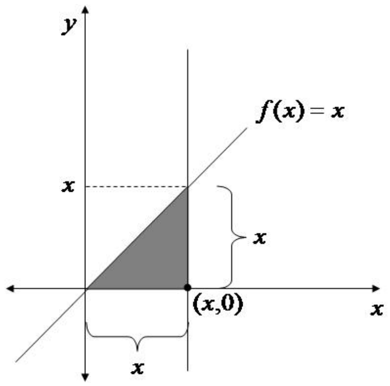


Figura 3.7:

Devemos escrever a área do triângulo destacado na figura. Sabemos que:

$$A_{\Delta} = \frac{base \times altura}{2}, \text{ logo}$$
$$A_{\Delta} = \frac{x \times x}{2}, \text{ e portanto}$$
$$A_{\Delta} = \frac{x^2}{2}$$

16. Sendo $senx = a - 1$ **e** $cosx = \sqrt{a-2}$ **, o valor de** a **é** 2**.**

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Pela relação fundamental da trigonometria temos:

$$sen^2x + cos^2x = 1$$
$$(a-1)^2 + (\sqrt{a-2})^2 = 1$$
$$a^2 - 2a + 1 + a - 2 = 1$$
$$a^2 - a - 2 = 0$$
$$\text{Logo } a = 2 \text{ ou } a = -1$$

Como $a - 2 \geq 0$**, temos que** $a = 2$**.**

5. (UFSC-2002) Marque a(s) proposição(ões) CORRETA(S).

01. **Dados $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = 3x + 2$, o valor de $f(g(1))$ é 9.**

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

$g(1) = 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5$

$f(5) = 2 \times 5 - 1 = 10 - 1 = 9$

Logo $f(g(1)) = 9$.

02. **O gráfico da função $f(x) = 2x - 1$ NÃO intercepta o terceiro quadrante.**

Resolução: **Proposição falsa, pois:**

Se fizermos $f(-2)$ teremos imagem -5, o que significa que o ponto (-2,-5) pertence ao gráfico de f e está no terceiro quadrante.

6. (UFSC-2003) Assinale no cartão-resposta a soma dos números associados à(s)proposição(ões) CORRETA(S).

01. **Para qualquer arco$x$ pertencente à interseção dos domínios das funções trigonométricas vale a igualdade $\frac{cossec^2(x)}{cotg^2(x)} = sec^2(x)$.**

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Escrevendo a expressão $\frac{cossec^2(x)}{cotg^2(x)}$ em função de seno e cosseno obtemos $sec^2(x)$.

$\frac{cossec^2(x)}{cotg^2(x)} = \frac{\frac{1}{sen^2 x}}{\frac{cos^2 x}{sen^2 x}} = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$.

02. **Os gráficos das funções $f_1(x) = sen(x)$ e $f_2(x) = 5sen(x)$ se interceptam numa infinidade de pontos.**

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Basta contruir os gráficos das duas funções:

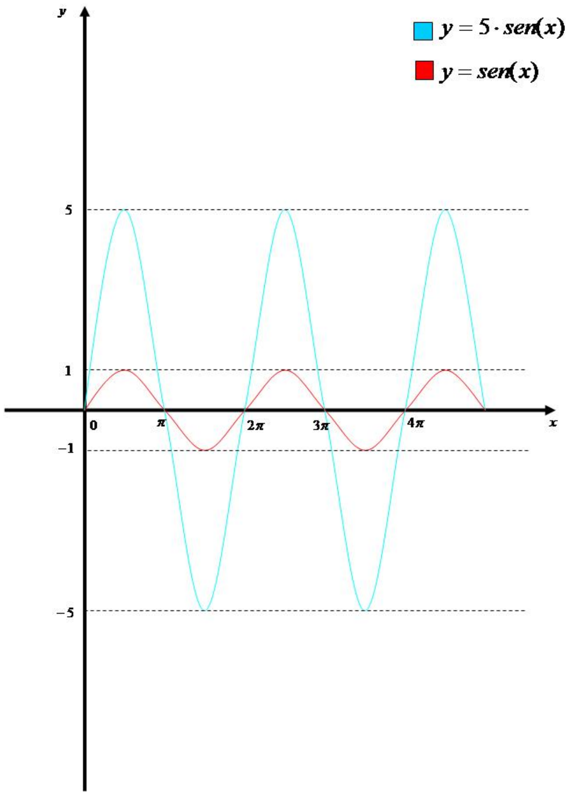


Figura 3.8:

04. Os gráficos das funções $g_1(x) = cos(x)$ e $g_2(x) = 3+cos(x)$ não possuem ponto em comum.

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Novamente, basta contruir os gráficos das duas funções:

Note que os gráficos não possuem pontos em comum.

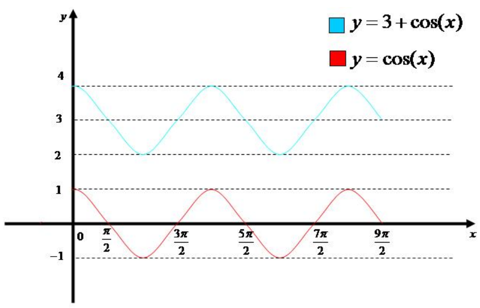


Figura 3.9:

08. **Os gráficos das funções $h_1(x) = senx$ e $h_2(x) = sen(x+1)$ se interceptam numa infinidade de pontos.**

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Outra vez, a resolução é dada pela construção dos gráficos das duas funções:

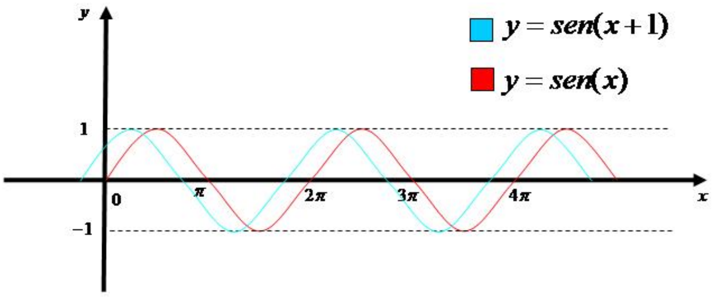


Figura 3.10:

7. **(UFSC-2003) Assinale no cartão-resposta a soma dos números associados à(s) proposição(ões) CORRETA(S).**

01. **Se numa área urbana o número de pessoas atingidas por certa doença (não controlada) aumenta 50% a cada mês, então a função $n(t) = N \cdot (\frac{3}{2})^t$ fornece o número (aproximado) de pessoas afetadas pela doença, t meses após o instante em que havia N pessoas doentes nessa área.**

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Contruindo uma tabela, a partir dos dados iniciais temos:

meses	pessoas doentes
0	N
1	$\frac{3N}{2}$
2	$\frac{9N}{4}$
3	$\frac{27N}{8}$
4	$\frac{81N}{16}$

Note que, ao continuarmos a escrever os elementos dessa tabela, estamos na verdade listando os termos de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é N e sua razão é $\frac{3}{2}$. Como t representa o tempo podemos escrever a expressão do termo geral dessa PG em função de t: $N \cdot (\frac{3}{2})^t$

02. Admita que a função $n(t) = N \cdot 2^t$ forneça o número aproximado de pessoas atingidas por uma epidemia (não controlada) onde t é o número de meses decorridos a partir do momento em que N pessoas são acometidas pela doença. Então é correto afirmar que, num aglomerado urbano com 10.000 habitantes, não ocorrendo aumento populacional, 8 meses após existirem 50 pessoas doentes é provável que toda a população estará doente, caso nada seja feito para debelar o mal.

    Resolução: Proposição verdadeira, pois:
    Devemos calcular $n(8)$ com $N = 50$:
    $n(8) = 50 \cdot 2^8 = 50 \cdot 256 = 12800 > 10000$, logo, em 8 meses toda população será afetada.

8. (UFSC-2005)Em cada item a seguir, $f(x)$ e $g(x)$ representam leis de formação de funções reais f e g, respectivamente. O domínio de f deve ser considerado como o conjunto de todos os valores de x para os quais $f(x)$ é real. Da mesma forma, no caso de g considera-se o seu domínio todos os valores de x para os quais $g(x)$ é real.
Verifique a seguir o(s) caso(s) em que f e g são iguais e assinale a(s) proposição(ões) CORRETA(S).

01. $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = |x|$

    Resolução: Proposição verdadeira, pois:
    Devemos analisar se $f(x) = g(x)$ para todo x e se $D_{(f)} = D_{(g)}$
    Como $D_{(f)} = \mathbb{R}$ e $D_{(g)} = \mathbb{R}$, basta analisar a lei de formação $f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = g(x)$, por definição, temos que f e g são iguais.

02. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Algébricamente, temos:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} = x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$$

Como as funções f e g têm mesmo domínio, $(0, \infty)$, f e g são iguais.

04. $f(x) = \sqrt{x^2}$ **e** $g(x) = x$

Resolução: **Proposição falsa, pois:**

$f(-1) = 1$ **e** $g(-1) = -1$

08. $f(x) = (\sqrt{x})^2$ **e** $g(x) = x$

Resolução: **Proposição falsa, pois:**

$f(-1)$ **não existe e** $g(-1) = -1$

16. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$ **e** $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$

Resolução: **Proposição falsa, pois:**

$f(-1)$ **não existe e** $g(-1) = \sqrt{\frac{1}{2}}$

9. **(UFSC-2005)Qualquer que seja o número real x, ele obedece à relação $n \leqslant x < n+1$, sendo n um número inteiro. Diz-se que n é a parte inteira de x e é denotada por $E(x) = n$. A partir dessa definição de E, calcular Y na expressão:**

$$Y = \frac{4 \times E(\sqrt{299}) + 2 \times E(log_5 127) - E(sen 233^o)}{E(\frac{7}{8}) + E(\sqrt{2})}$$

Resolução: **Devemos apenas calcular Y, inicialmente faremos:**

$$E(\sqrt{299}) = 17, ... = 17$$

$$E(log_5 127) = 3, ... = 3$$

$$E(sen 233^o) = -0, ... = -1$$

$$E(\frac{7}{8}) = 0, ... = 0$$

$$E(\sqrt{2}) = 1, 4... = 1$$

Substituido em Y temos:

$$Y = \frac{4 \cdot 17 + 2 \cdot 3 - (-1)}{0 + 1}$$

$$Y = 68 + 6 + 1$$

$$Y = 75$$

10. **(UFSC-2005)Um projétil é lançado verticalmente para cima com velocidade inicial de $300m/s$ (suponhamos que não haja nenhuma outra força, além da gravidade, agindo sobre ele). A distância d (em metros) do ponto de partida, sua velocidade v (em m/s) no instante t (em segundos contados a partir do lançamento) e aceleração a (em m/s^2) são dadas pelas fórmulas:**

$$d = 300t - \frac{1}{2} \times 10t^2, v = 300 - 10t, a = -10$$

Assinale a(s) proposição(ões) CORRETA(S).

01. **O projétil atinge o ponto culminante no instante $t = 30s$.**
    Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**
    Basta encontrar o ponto de máximo, ou seja, a abscissa do vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-300}{2 \cdot (-5) = \frac{300}{10}} = 30$$

02. **A velocidade do projétil no ponto culminante é nula.**
    Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**
    Basta calcular $v(30)$:

$$v(30) = 300 - 10 \cdot 30 = 300 - 300 = 0$$

04. **A aceleração do projétil em qualquer ponto da sua trajetória é $a = -10m/s^2$.**
    Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**
    A aceleração é constante em todo ponto da trajetória,$a = -10m/s^2$.

08. O projétil repassa o ponto de partida com velocidade $v = 300m/s$.

Resolução: **Proposição falsa, pois:**

Basta calcular $v(60)$:

$$v(60) = 300 - 10 \cdot 60 = -300$$

16. A distância do ponto culminante, medida a partir do ponto de lançamento, é de $4500m$.

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Basta calcular $d(30)$:

$$d(30) = 300 \cdot 30 - \frac{1}{2} \times 10 \times 30^2 = 4500$$

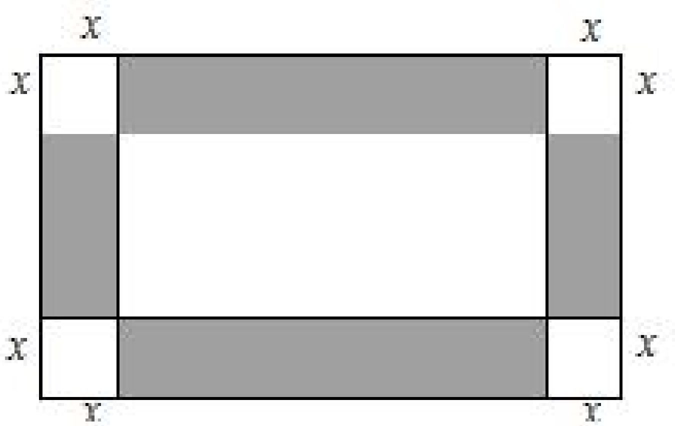
32. O projétil repassa o ponto de lançamento no instante $t = 60s$.

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Basta verificar se $d(60) = 0$

$$d(60) = 300 \cdot 60 - \frac{1}{2} \times 10 \times 60^2 = 0$$

11. (UFSC-2005) Tem-se uma folha de cartolina com forma retangular, cujos lados medem $56cm$ e $32cm$ e deseja-se cortar as quinas, conforme ilustração a seguir. Quanto deve medir x, em centímetros, para que a área da região hachurada seja a maior possível?



Resolução: **Devemos escrever a área hachurada em função de x e achar seu ponto de máximo. Então,**

$$A(x) = 2 \cdot (56 - 2x) \cdot x + 2 \cdot (32 - 2x) \cdot x$$
$$A(x) = 2 \cdot (88x - 4x^2)$$
$$A(x) = -8x^2 + 176x$$

Para encontrar o ponto de máximo basta encontrar a abscissa do vértice da parábola representada por $A(x) = -8x^2 + 176x$.

$$X_v = -\frac{b}{2a}$$
$$X_v = \frac{176}{16}$$
$$X_v = 11$$

Portanto a medida de x deve ser $11cm$.

12. (UFSC-2006) Assinale a(s) proposição(ões) CORRETA(S).

01. Seja uma função polinomial do primeiro grau, decrescente, tal que $f(3) = 2$ e $f(f(1)) = 1$. Determine a abscissa do ponto onde o gráfico de f corta o eixo X.

Resolução: **Sendo f uma função polinomial do primeiro grau podemos escreve-la na forma $f(x) = ax + b$. Como $f(3) = 2$ teremos:**

$$f(3) = 3a + b = 2$$
$$b = 2 - 3a \qquad (i)$$

E por ser $f(f(1)) = 1$ escreveremos:

$$f(f(1)) = a(a + b) + b = 1$$
$$a^2 + ab + b = 1$$
$$a^2 + (a + 1)b - 1 = 0 \qquad (ii)$$

Substituindo (i) em (ii) temos:

$$a^2 + (a+1)(2-3a) - 1 = 0$$
$$a^2 + 2a + 2 - 3a^2 - 3a - 1 = 0$$
$$-2a^2 - a + 1 = 0$$
$$a^2 - a - 2 = 0$$
$$a = \frac{1}{2}$$

ou

$$a = -1$$

Como f é decrescente $a = -1$ e substituindo $a = -1$ em (i) temos $b = 5$. Portanto $f(x) = -x + 5$. Para saber onde f corta o eixo das abscissas basta encontrar a raíz de f, que é 5.

13. (UFSC-2006) Assinale a(s) proposição(ões) CORRETA(S).

01. Se $f(x) = 3x + a$ e a função inversa de f é $g(x) = \frac{x}{3} + 1$, então o valor de a é -3.

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

Se f é a inversa de g podemos escrever:

$$f \circ g(x) = 3 \cdot (\frac{x}{3} + 1) + a = x$$
$$g \circ f(x) = (\frac{3x + a}{3} + 1) = x$$

Devemos ter $f \circ g = g \circ f$, portanto:

$$\frac{3x}{3} + 3 + a = \frac{3x}{3} + \frac{a}{3} + 1$$
$$a - \frac{a}{3} = 1 - 3$$
$$3a - a = 6$$
$$2a = -6$$
$$a = -3$$

14. (UFSC-2006) Assinale a(s) proposição(ões) CORRETA(S).

01. Os gráficos das funções $f(x) = sen(4x)$ e $g(x) = \frac{-2x}{3} + \frac{\pi}{4}$ têm exatamente 3 pontos em comum, para x no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Resolução: **Proposição verdadeira, pois:**

É necessário construir os gráficos das duas funções para o intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Portanto temos três pontos em comum.

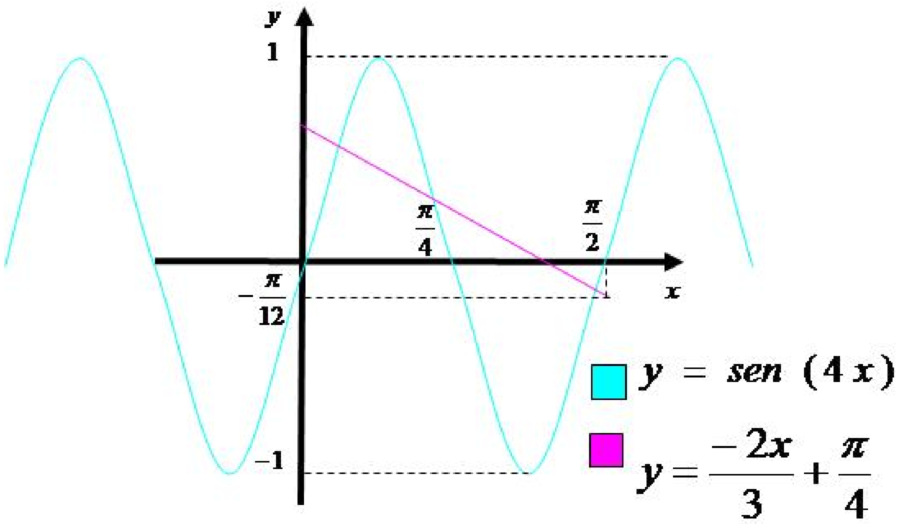


Figura 3.11:

3.3 Análise das Questões

Após a resolução de todas as questões escolhidas, faremos uma análise das mesmas, utilizando os termos tarefa, técnica, tecnologia e teoria (segundo a teoria de Ives Chevallard).

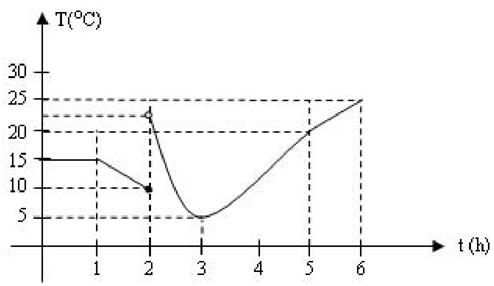
Com essa análise, pretendemos identificar a reincidência de conteúdos bem como, de técnicas usadas para obter as resoluções anteriormente registradas.

Para a organização desses dados, foi construída uma tabela para cada questão, contendo a tarefa, a técnica e a tecnologia utilizada. O termo "teoria" não aparecerá na tabela, visto que todos exercícios em questão são referentes à mesma teoria: **Álgebra**.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
(UFSC-2000) Sejam as funções $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ **definida para todo** x **real e** $x \neq 1$ **e** $g(x) = 2x + 3$ **definida para todo** x **real. Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S).** **01.** $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ **para todo** $x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$**.**	· Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:*Verificar uma determinada relação entre as imagens $f(\frac{1}{x})$ e $f(x)$.	·Resolução de equações.(operações com números reais)	· Propriedades dos números reais · Definição de valor da função em um ponto
02. O domínio da função $f \circ g$ **(f composta com g) é** $D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{-1\}$**.**	· Identificar se a afirmação e verdadeira ou falsa. *Subtarefa:*Determinar o domínio de $f \circ g$.	· Verificar a existência de restrições no domínio de $f \circ g$.	· Propriedades dos números reais ·Definição de função composta ·Definição de domínio de função

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
04. O valor de $g(f(2))$ é igual a $\frac{4}{3}$.	· Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Aplicar a definição de função em um ponto.	· Calcular $f(2)$ para posteriormente calcular $g(f(2))$	· Propriedades dos números reais · Definição de função composta · Definição de valor da função em um ponto.
08. A função inversa de g é definida por $g^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$.	· Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Aplicar a definição de inversa.	· Resolução de equações	· Propriedades dos números reais · Definição de função inversa

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
16. A reta que representa a função g intercepta o eixo das abscissas em $(-\frac{3}{2}, 0)$.	· Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar onde g intersecta o eixo das abscissas.	· Construção de gráfico · Calcular $g(-\frac{3}{2})$	· Propriedades dos números reais · Definição de produto cartesiano. · Definição de gráfico de função. · Definição de valor da função em um ponto.
32. A função f assume valores estritamente positivos para $x < -1$ ou $x > 1$.	· Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar o sinal algébrico da função para dois intervalos	· Resolução de inequações.	· Propriedades dos números reais

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
(UFSC-2000) O gráfico abaixo representa temperatura T(C) x tempo t(h).  **01.No intervalo entre $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ a temperatura diminuiu numa taxa constante.**	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Determinar a taxa de variação em um intervalo dado.	·Análise do gráfico. · Reconhcer que a taxa constante está associada à uma reta.	· Propriedades dos números reais ·Definição de gráfico de função
02.A função que determina a temperatura entre $t_1 = 5$ e $t_2 = 6$ é do tipo $y = ax + b$, com $a > 0$.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Determinar que tipo de equação que descreve um gráfico.	· Análise do gráfico. · Aplicação da definição de função afim.	· Propriedades dos números reais ·Definição de gráfico de função ·Definição de função afim

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
04.A temperatura diminuiu mais rapidamente no intervalo entre $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ do que no intervalo entre $t_2 = 2$ e $t_3 = 3$.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa.	·Análise do gráfico.	· Propriedades dos números reais ·Definição de gráfico de função
08.A temperatura máxima ocorreu no instante $t = 2$.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar o valor máximo da função no gráfico.	·Análise do gráfico. · Reconhecer o valor máximo e o ponto de máximo da função no gráfico.	· Propriedades dos números reais ·Definição de gráfico de função ·Definição de imagem de função
16.A temperatura mínima ocorreu no instante $t = 3$.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar o valor mínimo da função no gráfico.	·Análise do gráfico. · Reconhecer o valor mínimo e o ponto de mínimo da função no gráfico.	· Propriedades dos números reais ·Definição de gráfico de função ·Definição de imagem de função

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
(UFSC-2001) Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S). **01.O domínio da função** $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$ **definida por** $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x-10}}{x-6}$ **é** $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2$ **ou** $x \geq 5\} - \{6\}$**.**	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:*Verificar o domínio da função.	·Verificar a existência de restrições na lei da função. · Resolução de inequações	· Propriedades dos números reais · Definição domínio de função
02.A função inversa da função $g(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ é definida por $g^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x-2}$.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar se $g^{-1}(x)$ é a inversa de $g(x)$.	·Resolução de equações.	· Propriedades dos números reais · Definição de função inversa

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
04. Sejam h e k , duas funções, dadas por $h(x) = 2x - 1$ e $k(x) = 3x + 2$. Então $h(k(1))$ é igual a 9.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Determinar o valor da composta em um determinado ponto.	· Calculo de $k(1)$ e posteriormente $h(k(1))$.	· Propriedades dos números reais · Definição de função composta
08.A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 2$, é uma função decrescente.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar se a função é decrescente.	·Verificação do sinal do coeficiente angular da reta de equação $y = x + 2$	· Propriedades dos números reais · Definição de função crescente e decrescente · Teorema que caracteriza função decrescente por meio do coeficiente angular que é seu gráfico.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
16.A função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 + 1$, é uma função par.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar se a função é par.	·Resolução de equações	· Propriedades dos números reais · Definição de função par
32.O conjunto imagem da função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \|x^2 - 4x + 3\|$ é $Im(h) = \{y \in \mathbb{R} \| y \geq -1\}$.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Determinar a imagem da função.	·Construção do gráfico da função.	· Propriedades dos números reais. · Definição gráfico de função. · Definição de produto cartesiano. · Definição de imagem de função.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
(UFSC-2002) Marque a(s) proposição(ões) CORRETA(S). **01.O conjunto imagem da função $g(x) = cosx$ é o conjunto dos números reais.**	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:*Determinar a imagem da função cosseno.	· Construção de gráfico.	·Definição de gráfico de funções.
02. Dadas as funções $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$, então o domínio da composta $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$, é $Dom(g \circ f) = [0, +\infty)$.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Determinar o domínio da função composta	·Verificar a existência de restrições no domínio de $g \circ f$. · Resolução de inequações. ·Operações com números reais	·Propriedades dos números reais. ·Definição de função composta. ·Definição de domínio de função.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
04. Se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ é uma função injetora e o conjunto $\mathbb{A}$ possui uma infinidade de elementos, então $\mathbb{B}$ (necessariamente) possui uma infinidade de elementos.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar a quantidade de elementos de $\mathbb{B}$	·Verificar a imagem de uma função injetora.	·Definição de função injetora ·Definição de imagem de função.
08.A função $g(x) = \frac{x^2}{2}$, $(x > 0)$ fornece a área do triângulo formado pelo gráfico da função $f(x) = x$, o eixo das abscissas e a reta vertical que passa pelo ponto $(x, 0)$.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:*Escrever a lei da função g, que fornece a área do triângulo formado pelo gráfico de f, o eixo das abscissas e a reta $y = 0$	·Identificar gráficos de funções. · Análise de gráfico · Expressar a área como uma função.	·Propriedades dos números reais. ·Definição de área do triângulo. ·Definição de gráfico.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
16. Sendo $senx = a - 1$ e $cosx = \sqrt{a-2}$, o valor de a é 2.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:*·Encontrar o valor de uma incógnita.	·Aplicar a relação fundamental da trigonometria. ·Resolução de equações.	·Propriedades dos números reais. ·Teorema de Pitágoras.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
(UFSC-2002) Marque a(s) proposição(ões) CORRETA(S). **01.Dados** $f(x) = 2x - 1$ **e** $g(x) = 3x + 2$**, o valor de** $f(g(1))$ **é 9.**	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Determinar o valor da composta em um determinado ponto.	·Calcular $g(1)$ e posteriormente $f(g(1))$.	·Propriedades dos números reais. ·Definição de função composta.
02.O gráfico da função $f(x) = 2x - 1$ **NÃO** intercepta o terceiro quadrante.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar se o gráfico de f intercepta o terceiro quadrante.	·Construção de gráfico. ·Verificação do sinal algébrico da função.	·Propriedades dos números reais ·Definição de gráfico de funções.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
(UFSC-2003) Assinale no cartão-resposta a soma dos números associados à(s)proposição(ões) CORRETA(S). **01.Para qualquer arco$x$ pertencente à interseção dos domínios das funções trigonométricas vale a igualdade** $\frac{cossec^2(x)}{cotg^2(x)} = sec^2(x)$.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar se a identidade é verdadeira.	·Escrever $cossec(x)$ e $cotg(x)$ em função de $sen(x)$ e $cos(x)$ e comparar os membros.	·Propriedades dos números reais. ·Relações trigonométricas
02. Os gráficos das funções $f_1(x) = sen(x)$ e $f_2(x) = 5sen(x)$ se interceptam numa infinidade de pontos.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar se os gráficos de f_1 e f_2 se interceptam numa infinidade de pontos.	· Construção de gráficos. · Resolução de equações trigonométricas.	·Propriedades dos números reais. ·Definição de gráfico de função.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
04. Os gráficos das funções $g_1(x) = cos(x)$ e $g_2(x) = 3 + cos(x)$ não possuem ponto em comum.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar se os gráficos de duas funções se interceptam.	· Construção de gráficos. · Resolução de equações trigonométricas.	·Propriedades dos números reais. ·Definição de gráfico de função.
08. Os gráficos das funções $h_1(x) = senx$ e $h_2(x) = sen(x+1)$ se interceptam numa infinidade de pontos.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar se os gráficos de g_1 e g_2 se interceptam.	· Construção de gráficos. · Resolução de equações trigonométricas.	·Propriedades dos números reais. ·Definição de gráfico de função.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
(UFSC-2003) Assinale no cartão-resposta a soma dos números associados à(s) proposição(ões) CORRETA(S). **01. Se numa área urbana o número de pessoas atingidas por certa doença (não controlada) aumenta** 50% **a cada mês, então a função** $n(t) = N \cdot (\frac{3}{2})^t$ **fornece o número (aproximado) de pessoas afetadas pela doença,** t **meses após o instante em que havia** N **pessoas doentes nessa área.**	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar se $n(t)$ é a função que fornece o número de pessoas afetadas pela doença em função do tempo.	·Equacionar o problema. ·Reconhecimento de padrão.	·Propriedades dos números reais. ·Seqüências Numéricas (Progressão Geométrica).
02. Admita que a função $n(t) = N \cdot 2^t$ forneça o número aproximado de pessoas atingidas por uma epidemia (não controlada) onde t é o número de meses decorridos a partir do momento em que N pessoas são acometidas pela doença. Então é correto afirmar que, num aglomerado urbano com 10.000 habitantes, não ocorrendo aumento populacional, 8 meses após existirem 50 pessoas doentes é provável que toda a população estará doente, caso nada seja feito para debelar o mal.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar em quanto tempo a epidemia tomará conta da população da cidade.	·Calcular $n(8)$ para $N = 50$ e verificar se $n(8) > 10000$	·Propriedades dos números reais.

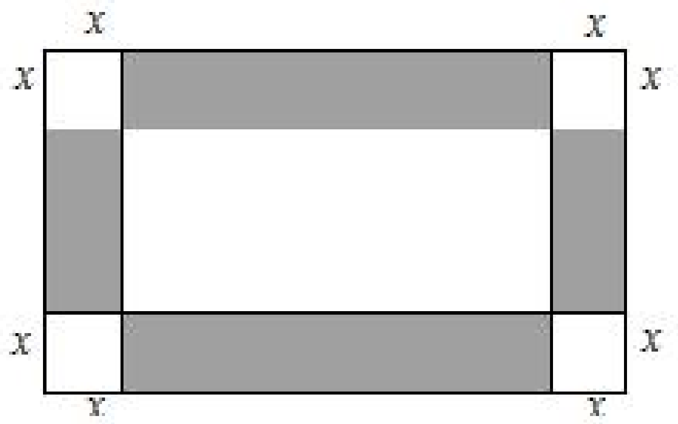
QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
(UFSC-2005)Em cada item a seguir, $f(x)$ e $g(x)$ representam leis de formação de funções reais f e g, respectivamente. O domínio de f deve ser considerado como o conjunto de todos os valores de x para os quais $f(x)$ é real. Da mesma forma, no caso de g considera-se o seu domínio todos os valores de x para os quais $g(x)$ é real. **Verifique a seguir o(s) caso(s) em que f e g são iguais e assinale a(s) proposição(ões) CORRETA(S).** **01.** $f(x) = \sqrt{x^2}$ **e** $g(x) = \|x\|$ **02.** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ **e** $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **04.** $f(x) = \sqrt{x^2}$ **e** $g(x) = x$ **08.** $f(x) = \sqrt{x}^2$ **e** $g(x) = x$ **16.** $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$ **e** $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$	·Verificar se as funções são iguais. *Subtarefa:*Verificar se para todo ponto do domínio f e g têm os mesmos valores. *Subtarefa:* Verificar se as funções têm o mesmo domínio.	·Resolução de inequações.	·Propriedades dos números reais. ·Definição de igualdade de funções.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
(UFSC-2005)Qualquer que seja o número real x, ele obedece à relação $n \leqslant x < n+1$, sendo n um número inteiro. Diz-se que n é a parte inteira de x e é denotada por $E(x) = n$. A partir dessa definição de E, calcular Y na expressão: $$Y = \frac{4 \times E(\sqrt{299}) + 2 \times E(log_5 127) - E(sen 233^o)}{E(\frac{7}{8}) + E(\sqrt{2})}$$	·Calcular o valor de Y. *Subtarefa:* Aplicar a relação $n \leqslant x < n+1$ com $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$, ou seja calcular $E(\sqrt{299})$,$E(log_5 127)$, $E(sen 233^o)$, $E(\sqrt{2})$ e $E(\frac{7}{8})$.	·Redução ao primeiro quadrante. · Cálculo de logaritmo · Cálculo da aproximação de raíz quadrada.	·Propriedade da função menor inteiro. ·Propriedade dos números reais. ·Propriedade dos logaritmos. ·Propriedade da função seno.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
(UFSC-2005)Um projétil é lançado verticalmente para cima com velocidade inicial de $300m/s$ **(suponhamos que não haja nenhuma outra força, além da gravidade, agindo sobre ele). A distância** d **(em metros) do ponto de partida, sua velocidade** v **(em m/s) no instante** t **(em segundos contados a partir do lançamento) e aceleração a (em** m/s^2**) são dadas pelas fórmulas:** $$d = 300t - \frac{1}{2} \times 10t^2, v = 300 - 10t, a = -10$$ **Assinale a(s) proposição(ões) CORRETA(S).** **01.** O projétil atinge o ponto culminante no instante $t = 30s$.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar se aos trinta segundos o projétil atinge o ponto culminante.	·Encontrar o ponto de máximo da função d.	·Propriedades dos números reais. · Movimento uniformemente variado.
02. A velocidade do projétil no ponto culminante é nula.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar a velocidade do projétil no ponto para o qual a distância é máxima.	· Calcular $v(30)$.	·Propriedades dos números reais. · Movimento uniformemente variado. · Definição de valor da função em um ponto.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
04. A aceleração do projétil em qualquer ponto da sua trajetória é $a = -10m/s^2$.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar a aceleração do projetil em toda trajetória.	·Reconhecer que a aceleração é constante.	·Propriedades dos números reais. · Movimento uniformemente variado.
08. O projétil repassa o ponto de partida com velocidade $v = 300m/s$.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar a velocidade do projétil quando repassa o ponto da partida.	·Calcular $v(60)$.	·Propriedades dos números reais. · Movimento uniformemente variado. · Definição de valor em um ponto.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
16. A distância do ponto culminante, medida a partir do ponto de lançamento, é de $4500m$.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Determinar a distância entre o ponto culminante e o ponto de lançamento.	· Calcular $d(30)$	·Propriedades dos números reais. · Movimento uniformemente variado. · Definição de valor em um ponto.
32. O projétil repassa o ponto de lançamento no instante $t = 60s$.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Determinar o instante em que o projétil repassa o ponto de lançamento.	·Verificar se $d(60) = 0$.	·Propriedades dos números reais. · Movimento uniformemente variado. · Definição de valor em um ponto.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
(UFSC-2005) Tem-se uma folha de cartolina com forma retangular, cujos lados medem $56cm$ **e** $32cm$ **e deseja-se cortar as quinas, conforme ilustração a seguir. Quanto deve medir** x**, em centímetros, para que a área da região hachurada seja a maior possível?** 	· Determinar o valor de x para que a área da região hachurada seja máxima. *Subtarefa:* Expressar o problema através de uma função polinomial do segundo grau e encontrar seu ponto de máximo.	· Expressar a área do retângulo em função de x. · Reconhecer a simetria · Calcular o ponto de maximo da função quadrática.	·Propriedades dos números reais. ·Definição de área do retângulo. ·Simetrias no retângulo. ·Propriedades da função quadrática.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
(UFSC-2006) Seja f uma função polinomial do primeiro grau, decrescente, tal que $f(3) = 2$ e $f(f(1)) = 1$. Determine a abscissa do ponto onde o gráfico de f corta o eixo X.	·Determinar a abscissa do ponto onde o gráfico de f corta o eixo X.	·Resolução de sistema. ·Resolução de equações de primeiro e segundo graus.	·Sistemas de equações. ·Propriedades dos números reais. ·Definição de função decrescente.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
(UFSC-2006) Se $f(x) = 3x + a$ e a função inversa de f é $g(x) = \frac{x}{3} + 1$, então o valor de a é -3.	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Determinar o valor de a para que g seja a inversa de f.	·Resolução de equações.	·Definição de função inversa ·Propriedades dos números reais.

QUESTÃO	TAREFA	TÉCNICA	TECNOLOGIA
(UFSC-2006) Assinale a(s) proposição(ões) CORRETA(S). **01. Os gráficos das funções** $f(x) = sen(4x)$ **e** $g(x) = \frac{-2x}{3} + \frac{\pi}{4}$ **têm exatamente** 3 **pontos em comum, para** x **no intervalo** $(0, \frac{\pi}{2})$**.**	·Identificar se a afirmação é verdadeira ou falsa. *Subtarefa:* Verificar em quantos pontos o gráficos de f e g se encontram.	·Contruir os gráficos de f e g para o intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$	Definição de gráfico de função.

Neste trabalho analizamos 14 questões, sendo três delas do tipo "ABERTA"e as demais, do tipo "MÚLTIPLA ESCOLHA". Dentre as questões do tipo "ABERTA"tivemos tarefas e técnicas bem distintas: são elas:

TAREFAS

a. Calcular o valor de Y (Questão 9).

b. Determinar o valor de x para que a área da região hachurada seja máxima (Questão 11).

c. Determinar a abscissa do ponto onde o gráfico de f corta o eixo X (Questão 12).

TÉCNICAS

a. Aplicar a relação $n \leqslant x < n+1$ com $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$(Questão 9).

b. Expressar o problema através de uma função polinomial do segundo grau e encontrar seu ponto de máximo(Questão 11).

c. Resolução de sistema(Questão 12).

d. Resolução de equações de primeiro e segundo graus(Questão 12).

No entanto, em termos de tecnologia, faz-se necessário o domínio das *propriedades dos números reais* em todas elas, propriedades estas que são adquiridas no Ensino Fundamental.

Nas questões do tipo "MÚLTIPLA ESCOLHA"foram avaliados 43 itens que reincidem nas tarefas, técnicas e tecnologias.

Dentre as tarefas, constatamos que a mais evidente (100% dos casos) efetua a verificação de alternativas verdadeiras ou falsas. Acreditamos que isso se deva ao fato de permitir uma maior avaliação do conhecimento dando ênfase ao embasamento teórico.

No tocante às técnicas, observamos uma grande variedade, pois a mesma técnica pode ocorrer em mais de um item. Para organizá-las, foi elaborada uma tabela na qual constam suas freqüências e suas respectivas porcentagens. Ei-la:

TÉCNICA	FREQÜÊNCIA	RAZÃO
Análise de gráfico	13	$\frac{13}{43}$
Construção de gráfico	9	$\frac{9}{43}$
Descrever uma situação atravéz de uma função	3	$\frac{3}{43}$
Resolução de Equações	10	$\frac{10}{43}$
Redução ao primeiro quadrante	1	$\frac{1}{43}$
Verificar uma relação	8	$\frac{8}{43}$
Reconhecimento de padrão	1	$\frac{1}{43}$
Determinar o domínio de uma função	3	$\frac{3}{43}$

TÉCNICA	FREQÜÊNCIA	RAZÃO
Calcular o valor de uma função para um determinado número	6	$\frac{6}{43}$
Calcular o valor da composta de uma função para um determinado número	3	$\frac{3}{43}$
Resolução de inequações	8	$\frac{8}{43}$
Determinar o sinal algébrico da função	7	$\frac{7}{43}$
Encontrar a função inversa	3	$\frac{3}{43}$
Encontrar a intersecção do gráfico de uma função com os eixos coordenados	1	$\frac{1}{43}$
Determinar máximos ou mínimos de uma função	3	$\frac{3}{43}$
Verificar se uma função é crescente ou decrescente	2	$\frac{2}{43}$

TÉCNICA	FREQÜÊNCIA	RAZÃO
Verificar se uma função é par ou ímpar	1	$\frac{1}{43}$
Determinar a imagem de uma função	2	$\frac{2}{43}$
Verificar se uma função é injetora	1	$\frac{1}{43}$

Com base nas informações acima descritas, constatamos que as técnicas que mais se destacam são: *análise de gráfico, resolução de equações, construção de gráfico, resolução de inequações e estudo de sinal algébrico de funções.*

É válido lembrar que o aparecimento de todas essas técnicas são supostamente conhecidas dos alunos do Ensino Médio, uma vez que há incidência das mesmas nos livros didáticos, (pode ser verificado em [4], [5] entre outros) .

Outro fato importante a ser observado foi que algumas técnicas, tais como *redução ao primeiro quadrante, reconhecimento de padrão, encontrar a intersecção de um gráfico com um eixo coordenado* dentre outros, apareceram com pouca intensidade neste trabalho; porém, faz-se necessário frisar que esse fator poderia não ocorrer se o assunto principal não fosse funções.

Por fim, ressaltamos que, assim como nas questões "ABERTAS", as *propriedades dos números reais* também têm papel fundamental nas questões de "MÚLTIPLA ESCOLHA", sendo usadas em quase todos os itens analisados.

Conclusão

Chegamos ao final do trabalho sem a resposta à perguta inicial no nosso estudo; "Qual o segredo para passar no vestibular?", o que já era presvisto. Talvez, nem fosse esta a nossa pretensão. Nosso objetivo maior foi notificar caminhos desmitificadores em relação ao vestibular, mostrando tanto para alunos como para professores que a Matemática pode ser organizada de forma a ser tratada com naturalidade. Assim, esperamos que esse trabalho contribua para uma reflexão do corpo docente acerca do aprendizado da Matemática, e que ele possa utilizá-lo em sala de aula, estimulando seus alunos, na descoberta de novos meios para resolução de questões apresentadas.

Com relação ao corpo discente, esperamos que nossa contribuição se dê através das informações referentes ao vestibular da UFSC, nesse contexto, destacamos as técnicas de resolução os tipos de questões (somatório e aberta), os conteúdos mais abordados e, sobre tudo, o embasamento teórico.

Da análise feita através da teoria de Chevallard, acreditamos que um dos grandes problemas da aprendizagem está associado ao pouco conhecimento das propriedades dos número reais ("matemática básica"); verificamos ainda, que em quanto professores, esta teoria nos dá suporte para uma melhor análise de livros didáticos, bem como para a organização na exposição de idéias (apresentação de definições, propriedades, teoremas, e a própria resolução de exercícios).Pode-se dar destaque também, às técnicas mais utilizadas: análise de gráfico, construção de gráfico, resolução de equações e resolução de inequações; Assim como as de menor incidência: encontrar a intersecção do gráfico de uma função com os eixos coordenados, reconhecimento de padrão, redução ao primeiro quadrante, verificar se uma função é injetora, isso tudo, porque nosso estudo foi feito com base nas questões sobre funções. Caso tivessemos escolhido outro tema, por exemplo "seqüências numéricas", teriamos maior aparecimento da técnica "reconhecimento de padrão", ou seja teriamos outros dados em relação à incidência de técnicas. Aqui é válido observar também que a importância da prática em sala de aula é fator indispensável para a aplicabilidade dessa teoria. Por outro lado, na tentativa de viabilizar o aprendizado, o professor incorre na prática dos "macetes", atitude questionada por encobrir as reais justificativas de uma determinada *técnica* ou *tecnologia*, (cabe aqui afirmar que o próprio "macete"constitui uma técnica).

Por fim, esperamos que esse trabalho sirva de inspiração aos próximos estudos relacionados ao vestibular da UFSC, não somente na área da Matemática, mas também estendendo-se a outros eixos temáticos.

Referências Bibliográficas

[1] BERNAL, Márcia Maria. *Estudo do Objeto Proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado.* Dissertação defendida em maio de 2004.

[2] Comissão Permanente do Vestibular da Universidade Federal de Santa Catarina. *Cadernos de Questões e Relatórios(2000-2006)* Florianópolis.

[3] GIMENEZ,Carmem Suzane Comitre *Material Didático (Notas de Aula) do Curso de Licenciatura Modalidade à Distância, Disciplina: Introdução ao Cálculo/Carmem Suzane Comitre Gimenez, Rubens Starke* Florianópolis, 2006.

[4] GIOVANNI, José Ruy *Coleção: Matemática 1, conjuntos, funções e trigonometria: 2º grau/José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno* São Paulo: FTD, 1992.

[5] GIOVANNI, José Ruy *Coleção: Matemática uma Nova Abordagem, volume-1/José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno* São Paulo: FTD, 2000.

[6] GIOVANNI, José Ruy *Coleção: Matemática uma Nova Abordagem, Guia Pedagógico/José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno* São Paulo: FTD, 2000.

[7] KOOGAN, Abrahão. *Pequeno Dicionário Enciclopédico KOOGAN LAROUSSE.* Editora Larousse do Brasil. Rio de Janeiro, 1979.

[8] KÜHLKAMP, Nilo *Cálculo 1, 2ª ed.* Florianópolis: Editora da UFSC, 2001.

[9] MORETTI, Méricles Thadeu *Coleção: Matemática: Vestibulares da UFSC de 1989 a 2002: questões, sugestões e resoluções/Méricles Thadeu Moretti, Samuel Aniceto Zacchi* .Florianópolis: Editora da UFSC, 2002.

[10] ZACCHI, Juliana Duarte . *Problemas Olímpicos*. 69fls. 2004 (Trabalho de Conclusão de Curso) Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina.

[11] Diponível em : www.ufsc.br/coperve, acesso de agosto de 2006 a fevereiro de 2007

[12] Diponível em : www.ufsc.br acesso de agosto de 2006 a fevereiro de 2007