Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

# Resolução de Problemas Geométricos através de Polinômios

Sergio Alberto Pecanka

Florianópolis
Junho de 2009

Sergio Alberto Pecanka

# Resolução de Problemas Geométricos através de Polinômios

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, Departamento de Matemática sob a orientação do professor Antonio Vladimir Martins.

Centro de Ciências Físicas e Matemática
Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis

Junho de 2009

**ÍNDICE**

# AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer algumas pessoas que participaram direta ou indiretamente da confecção deste trabalho de conclusão de curso.

Em primeiro lugar, agradeço a minha esposa, Marta, e a meu filho Arthur, pela paciência e incentivo, fatores constantes e decisivos na minha caminhada da graduação.

Agradeço a Deus por me ter dado a oportunidade de vir a este mundo, afim de que eu possa ensinar a todos os meus atuais e futuros alunos a ciência matemática.

Agradeço também a meus professores que por terem se empenhado em transferir todo o conhecimento possível, em especial ao professor Antonio Vladimir Martins, pela dedicação e paciência em explicar os objetivos do projeto e direcionar meus esforços ao melhor resultado possível.

Esta Monografia foi julgada adequada como TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº. 23/CCM/2009.

Nereu E. Burin

Prof. Nereu Estanislau Burin
Professor da disciplina

Banca Examinadora:

Antonio Vladimir Martins

Antonio Vladimir Martins
Orientador

José Luiz Rosas Pinho

Nereu E. Burin

Nereu Estanislau Burin

# RESUMO

Este trabalho trata da resolução de problemas geométricos através de polinômios, visando fornecer ao futuro professor de matemática interação entre uma importante parte da álgebra, os polinômios, e a geometria. Ele também mostra como utilizar polinômios para identificar números irracionais, além de apresentar alguns fatos surpreendentes envolvendo polinômios.

# ABSTRACT

This work presents geometrical problems solutions through polynomials, in order to provide to the future mathematics teachers some links between an important part of algebra, polynomials, and geometry. It also shows how to use polynomials to identify irrationals numbers and presents some outstanding facts involving polynomials.

# INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo mostrar a importância do uso dos polinômios como importante ferramenta na resolução de problemas geométricos que, em geral, não é abordado no ensino médio.

Como nossa intenção neste trabalho é fornecer ao futuro professor de matemática uma alternativa de referência para exemplificar o uso de polinômios, procuramos mostrar soluções de problemas que se utilizam de conceitos vistos no Ensino Médio.

O capítulo 1 apresenta um resumo da teoria dos polinômios, o capítulo 2 trata das resoluções dos problemas geométricos envolvendo equações algébricas que contêm polinômios de vários graus, o capítulo 3 mostra como identificar números irracionais através de polinômios e o capítulo 4 apresenta alguns fatos surpreendentes envolvendo polinômios.

Sempre que cabível, procuramos mostrar em notas de rodapé a fonte do assunto que está sendo tratado, de modo a ajudar o leitor interessado a se aprofundar neste ou naquele tópico de seu interesse.

## 1.1 Resumo da teoria dos polinômios

Um polinômio é uma função de uma única variável *x* que pode ser escrita na forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, onde $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ são constantes complexas ($a_n \neq 0$) chamadas **coeficientes** de *p*.

Em forma compacta:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

O natural *n* chama-se grau de *p* e é denotado por gr(p) ou deg(p).

Um polinômio de grau zero é chamado polinômio constante.

Dois polinômios são iguais se os coeficientes das potências de *x* de mesma ordem são iguais. Em particular, dois polinômios iguais devem ter o mesmo grau.

A soma de dois polinômios é obtida adicionando-se os coeficientes das potências de *x* de mesma ordem de *x*.

Exemplo:

$$p(x) = x^2 - 4x + 2 \quad e \quad q(x) = 3x^3 - x^2 + 2x + 1$$

$$(p+q)(x) = (0+3)x^3 + (1+(-1))x^2 + (-4+2)x + (2+1) = 3x^3 - 2x + 3$$

A diferença de dois polinômios se faz subtraindo os coeficientes em vez de adicioná-los.

O produto de dois polinômios é feito usando-se repetidamente a lei distributiva e agrupando-se as potências de x.

Exemplo:

$$p(x) = x^2 - 4x + 2 \quad e \quad q(x) = 3x^3 - x^2 + 2x + 1$$

$$(pq)(x) = (x^2 - 4x + 2)(3x^3 - x^2 + 2x + 1) =$$

$$= x^2(3x^3 - x^2 + 2x + 1) - 4x(3x^3 - x^2 + 2x + 1) + 2(3x^3 - x^2 + 2x + 1) =$$

$$= (3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 + (-12x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 4x) + (6x^3 - 2x^2 + 4x + 2) =$$

$$= 3x^5 + (-12x^4 - x^4) + (6x^3 + 4x^3 + 2x^3) + (-2x^2 - 8x^2 + x^2) + (4x - 4x) + 2 =$$

$$= 3x^5 - 13x^4 + 12x^3 - 9x^2 + 2$$

Nota: gr(pq) = gr(p) + gr (q)

A divisão de dois polinômios *p* e *q*, (gr(p) ≤ gr(q)) é feita por divisão longa.

Exemplo:

$$p(x) = x^2 - 4x + 2 \qquad e \qquad q(x) = 3x^3 - x^2 + 2x + 1$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -x^2 & +2x & +1 & x^2 - 4x + 2 \\ \cline{5-5}
-3x^3 & +12x^2 & -6x & & 3x+11 \\ \cline{1-4}
 & +11x^2 & -4x & -1 & \\
 & -11x^2 & +44x & -22 & \\ \cline{1-4}
 & & +40x & -21 &
\end{array}$$

Obtivemos o resto 40x – 21, cujo grau é menor do que o divisor $x^2 - 4x + 2$, de modo que paramos o processo da divisão, e encontramos

$$3x^3 - x^2 + 2x + 1 = (x^2 - 4x + 2)(3x + 11) + (40x - 21)$$

ou

$$\frac{3x^3 - x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} = 3x + 11 + \frac{40x - 21}{x^2 - 4x + 2}$$

## 1.2 Teorema 1. (Algoritmo da divisão)

Se f e g, $(gr(f) \geq gr(g))$, então ∃ polinômios q(x) e r(x) tais que $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, onde r = 0 ou $gr(r) \leq gr(g)$.

Nota: no algoritmo da divisão, quando $r(x) = 0$ têm-se $f(x) = g(x)q(x)$ e dizemos que q(x) é fator de f(x).

Uma raiz (ou zero) de um polinômio f(x) é um número complexo *a* tal que f(a) = 0.

## 1.3 Teorema 2. (Teorema do Fator ou da fatoração)

“ $a$ é raiz de $f \Leftrightarrow (x - a)$ é fator de $f$ ”

Demonstração:

Pelo algoritmo da divisão,

$$f(x) = (x - a)q(x) + r(x)$$

Onde, ou r(x) = 0, ou $gr(r) < gr(x - a) = 1$. Assim, em ambos os casos, r(x) = r é uma constante.

Agora,

$$f(a) = (a - a)q(a) + r = r$$

De modo que f(a) = 0 se e somente se r = 0, que é equivalente a

$$f(x) = (x - a)q(x) \quad \blacksquare$$

## 1.4 Teorema 3. (Teorema das Raízes Racionais)

“Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ $(a_i \in \mathbb{Z})$ e $\frac{a}{b}$ é fração irredutível.

Se $f\left(\frac{a}{b}\right) = 0$, então $a | a_0$ e $b | a_n$.”

Demonstração:

Se $\frac{a}{b}$ é raiz de f, então

$$a_0 + a_1\left(\frac{a}{b}\right) + ... + a_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + a_n\left(\frac{a}{b}\right)^n = 0$$

multiplicando ambos os lados por $b^n$, temos

$$a_0b^n + a_1ab^{n-1} + ... + a_{n-1}a^{n-1}b + a_na^n = 0 \quad (1)$$

que implica em

$$a_0b^n + a_1ab^{n-1} + ... + a_{n-1}a^{n-1}b = -a_na^n \quad (2)$$

O membro esquerdo da equação (2) é um múltiplo de *b*, logo $a_na^n$ deve também ser um múltiplo de *b*.

Como $\frac{a}{b}$ é fração irredutível, *a* e *b* não possuem fatores comuns maiores do que 1.

Então, $a_n$ deve ser um múltiplo de *b*.

Podemos também escrever a equação (1) como

$$a_1ab^{n-1} + ... + a_{n-1}a^{n-1}b + a_na^n = -a_0b^n$$

e um argumento análogo mostra que $a_0$ deve ser múltiplo de a.

Exemplo: Determine todas as raízes racionais de $6x^3 + 13x^2 - 4 = 0$

Solução:

Se $\frac{a}{b}$ é raiz desta equação, então 6 é múltiplo de *b* e -4 é múltiplo de *a*, pelo Teorema das Raízes Racionais.

Logo,

$$a \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\} \quad \text{e} \quad b \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$$

Formando todos os possíveis números racionais $\frac{a}{b}$, temos que as únicas raízes racionais possíveis são

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{1}{6}$$

Substituindo estes valores, um de cada vez, na equação dada, verificamos que -2, $-\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$ são os únicos valores da lista que realmente são raízes.

Pode-se melhorar o método de tentativa e erro para se encontrar raízes da equação $6x^3 + 13x^2 - 4 = 0$ de várias formas.

Por exemplo, uma vez encontrada uma raiz *a* de uma dada equação polinomial f(x) = 0, temos que (x – a) é um fator de f(x), ou seja, f(x) = (x – a)g(x).

Para encontrarmos g(x), basta dividir f(x) por (x – a), usando a divisão longa.

Como gr(g) < gr(f), as raízes de g(x) = 0, que também são raízes de f(x) = 0, podem ser facilmente encontradas.

Em particular, se g(x) é um polinômio quadrático, podemos usar a fórmula de Bhaskara para determinar suas raízes.

## 1.5 Teorema 4. (TFA - Teorema Fundamental da Álgebra)

"Todo polinômio de grau *n* com coeficientes reais ou complexos possui exatamente *n* raízes em $\mathbb{C}$. (contando as multiplicidades)."

Ao leitor interessado na demonstração deste teorema, recomendamos que veja a elegância dos argumentos e o estilo esmerado da demonstração do professor Paulo Cezar P. Carvalho[1], que emprega o conceito de continuidade de funções polinomiais complexas.

Nota: As raízes complexas de um polinômio com coeficientes reais ocorrem em pares conjugados.

Justificativa: Suponhamos que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ é um polinômio com coeficientes reais. Seja α uma raiz complexa de *p* tal que

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0 = p(\alpha) = 0$$

Então, usando as propriedades dos conjugados, temos

$$p(\overline{\alpha}) = a_n\overline{\alpha^n} + a_{n-1}\overline{\alpha^{n-1}} + ... + a_1\overline{\alpha} + a_0 = \overline{a_n}\,\overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha^{n-1}} + ... + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \overline{a_0} =$$

$$= \overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + ... + a_1\alpha + a_0} = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

[1] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César; **A matemática do ensino médio**. Vols. 1, 2 3 e 4. Coleção do professor de matemática. SBM. Rio de Janeiro. 2005.

## 1.6 Polinômios de várias variáveis[2]

Um polinômio nas variáveis (indeterminadas) *x* e *y* é toda soma finita de termos da forma $cx^k.y^m$, onde *c* é um coeficiente (real ou complexo) e *k*, *m* são inteiros não negativos. O número k + m é chamado grau do termo e o grau do polinômio de duas variáveis é o grau mais alto entre o grau de seus termos.

Polinômios de várias variáveis podem ser somados, subtraídos e multiplicados de modo análogo a polinômios de uma variável x.

Exemplos:

1) x + y e xy são polinômios de duas variáveis.
   x + y tem grau 1 e xy tem grau 2.
2) $4xy^2 - 3xy - 7y + 3$ tem grau 3
   (maior k + m = 1 + 2 = 3, no termo $4xy^2$)

Existem duas classes importantes de polinômios f(x,y):

i) Polinômios simétricos: f(x,y) = f(y,x) e
ii) Polinômios homogêneos: todos os termos de f(x,y) têm o mesmo grau.

Exemplos:

$s_1 = x + y$ é simétrico e homogêneo de grau 1; $s_2 = xy$ é simétrico e homogêneo de grau 2; $f(x,y) = x^2+x+y+y^2$ é simétrico e não homogêneo; $h(x,y) = x^2y+2x^3$ é homogêneo e não simétrico, e $5x+7$ não é simétrico e nem homogêneo.

Nota: Polinômios de 3 variáveis x, y, z são somas finitas de termos do tipo $cx^k.y^m.z^n$, $k,m,n \in \mathbb{N} = 0,1,2,\ldots$

---

2 BARBEAU, M. – **Polynomials**, Reine et Servani des Sciences, Trad. De Saint-Genne, Paris, 1953.

Exemplos: $s_1 = x + y + z$; $s_2 = xy + yz + zx$; $s_3 = xyz$

Problema (Olimpíada Juvenil de Matemática – URSS): Fatorar $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Solução:

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} \overset{L_1+(L_2+L_3)}{=} \begin{vmatrix} x+y+z & y+x+z & z+y+x \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} =$$

$$= \; x+y+z \; \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} =$$

$$= \; x+y+z \; \left( \begin{vmatrix} x & y \\ z & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z & y \\ y & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & x \\ y & z \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \; x+y+z \quad x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$$

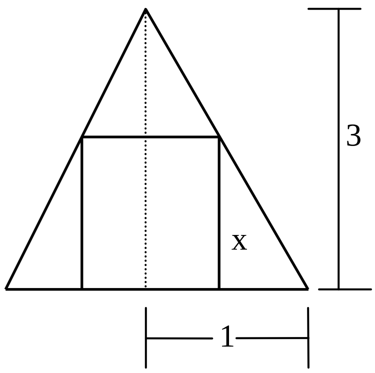
Portanto,

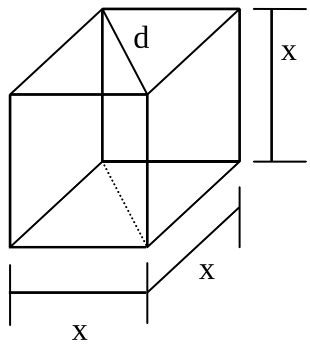
$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \; x+y+z \quad x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$$

## 2. Problemas geométricos

### 2.1 **Cubo inscrito no cone e o polinômio** $3+\sqrt{2}\ \ x-3\sqrt{2}$.

Um cone tem altura 3 e raio da base 1. Se um cubo é inscrito no cone, determine o lado do cubo.



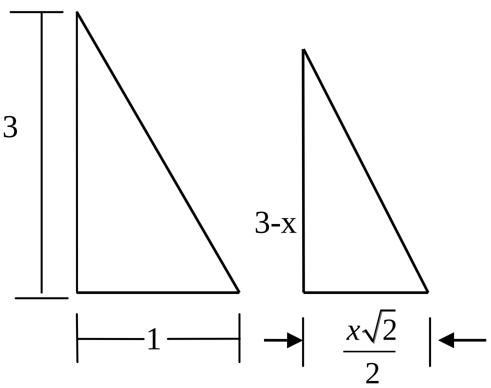




Solução:

Diagonal da face superior do cubo:

$$d = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$$

Semelhança de triângulos:




$$\frac{3}{1} = \frac{3 - x}{\frac{x\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}x = 3 - \mathrm{x}$$

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+1\right)x-3=0$$

$$3+\sqrt{2}\quad x-3\sqrt{2}=0$$

$$x=\frac{3\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{6}{2+3\sqrt{2}}\cong\frac{6}{6,24264068...}\cong 0,96113...$$

$$x\cong 0,96113...$$

## 2.2 **Problema da área do canteiro e o polinômio** $4x^2 - 2\ a+b\ x+\frac{ab}{2}$.[3]

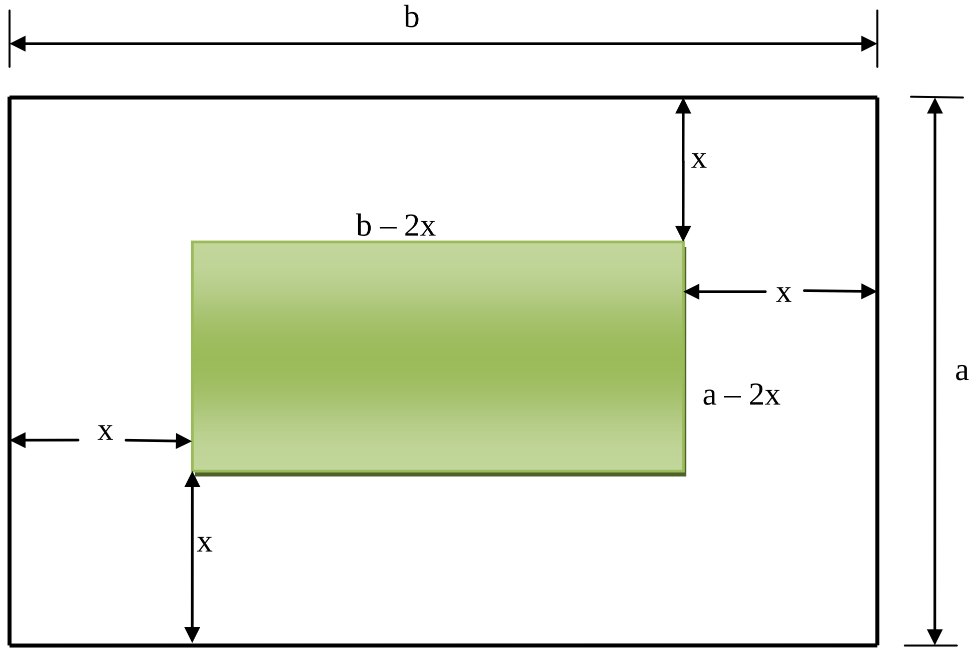
Um jardineiro pretende plantar a metade da área de um canteiro retangular, usando a outra metade para deixar um caminho de largura constante em torno de toda a área plantada. Como determinar a largura deste caminho se o jardineiro só dispõe de um barbante (de comprimento igual ao da diagonal do retângulo) e se ele não pode sair do canteiro?

Solução:

Para resolver este problema, calcularemos a largura do canteiro em função das dimensões do retângulo.

Sejam: *x* a largura do caminho e *a* e *b* as dimensões do retângulo, $A_c$ = área de um corredor em torno do canteiro plantado (retângulo verde) e $A_p$ = área plantada.

Como o jardineiro pretende plantar metade da área e deixar a outra metade para caminho de largura constante, temos $A_c = A_p$




$$A_c = A_p = \frac{ab}{2}$$

$$a-2x\quad b-2x\ = \frac{ab}{2}$$

[3] Watanabe, Renate; Mega, Élio (Compiladores). Olimpíadas Brasileiras de Matemática. 1ª a 8ª. Problemas e resoluções. Comissão de Olimpíadas da SBM. Editora Núcleo. São Paulo. 1988

$$4x^2 - 2(a+b)x + ab = \frac{ab}{2}$$

$$4x^2 - 2(a+b)x + \frac{ab}{2} = 0$$

$$x = \frac{2(a+b) \pm \sqrt{4(a+b)^2 - 8ab}}{8} = \frac{2(a+b) \pm \sqrt{4a^2 + 8ab + 4b^2 - 8ab}}{8}$$

$$= \frac{2(a+b) \pm \sqrt{4(a^2 + b^2)}}{8} = \frac{a+b \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{4}$$

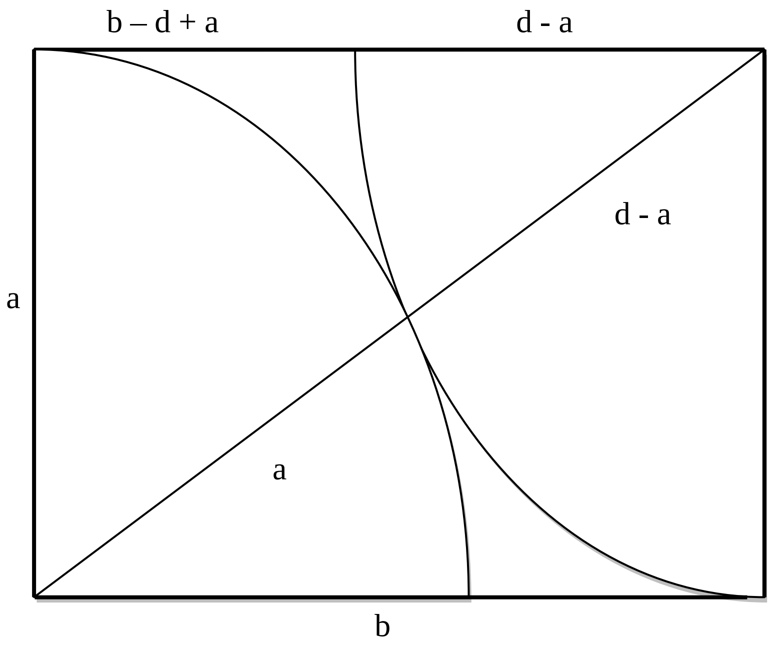
Onde a diagonal do retângulo maior, d, é igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$

Segue que $x = \dfrac{a+b \pm d}{4}$

Como $a+b > d$; $a - 2x > 0$ e $b - 2x > 0$ ; o jardineiro deve considerar apenas

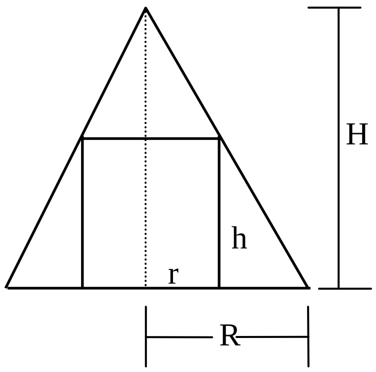
$$x = \frac{a+b-d}{4}$$

O jardineiro pode obter 4x utilizando o fio como compasso. Obtido 4x, dobra-se o fio ao meio duas vezes para se obter x, conforme ilustrado abaixo.



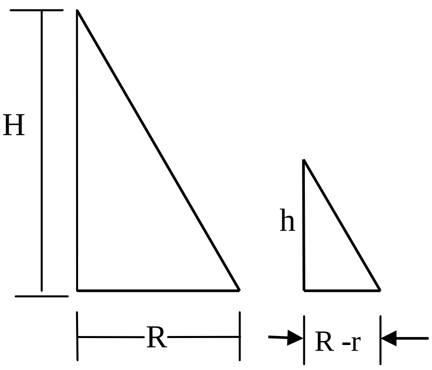
## 2.3 **Cilindro inscrito no cone e o polinômio** $ar^2 - br^3$.

Um cone tem altura H e raio da base R. Se um cilindro com raio da base r é inscrito no cone, exprima o volume do cilindro como função de r.




Solução:

Semelhança de triângulos:




$$\frac{H}{h} = \frac{R}{R - r}$$

$$h = \frac{H(R - r)}{R}$$

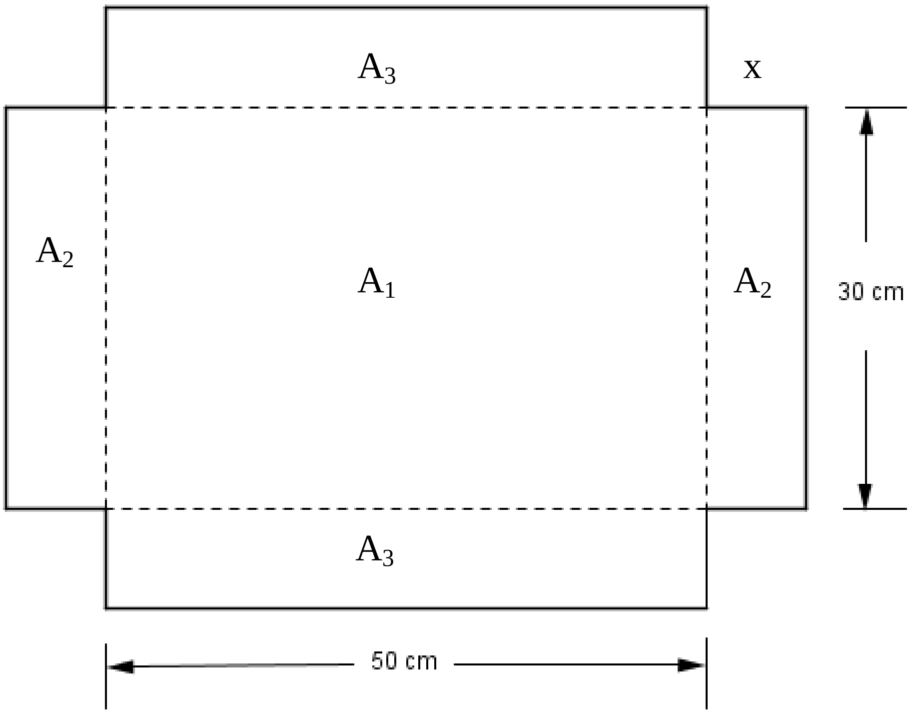
$$V_{cil.} = \frac{\pi r^2 H}{R}(R - r) = \frac{\pi H}{R}.(Rr^2 - r^3)$$

$$V_{cil.} = \frac{\pi H}{R}.(Rr^2 - r^3) = \frac{\pi H}{R}.Rr^2 - \frac{\pi H}{R}.r^3$$

$$V_{cil.} = ar^2 - br^3, a = \pi H \text{ e } b = \frac{\pi H}{R}$$

## 2.4 **Área da caixa e o polinômio** $-4x^2+1500$.

Dobrando-se a folha ao longo das linhas pontilhadas, obtém-se caixa sem tampa, de superfície lateral S. Qual a área da caixa em função de x ?




Solução:

Da figura, temos: $A_1 = (50-2x)(30-2x)$, $A_2 = x(30-2x)$ e $A_3 = x(50-2x)$

$$S(x) = A_1 + 2A_2 + 2A_3$$
$$= (50-2x)(30-2x) + 2x(30-2x) + 2x(50-2x) =$$
$$= 1500 - 100x - 60x + 4x^2 + 60x - 4x^2 + 100x - 4x^2 =$$
$$= -4x^2 + 1500$$
$$\therefore S(x) = -4x^2 + 1500$$

## 2.5 **O problema do container para o novo milênio[4] e o polinômio** $\frac{140}{27}x^3 - 2\ a+b\ x^2 + abx$

A partir de uma folha retangular de metal, de lados a e b, e usando estanho, tesoura e solda, construir um container sem tampa, diferente de sólido retangular, que maximize o volume. Além disso, exige-se que:

i) A folha metálica resultante dos cortes (e pronta para ser dobrada) deve formar uma só peça (veja figura 1, abaixo), e

ii) As faces tenham espessura uniforme e o container deve ter faces paralelas às faces de um cubo.

Solução:

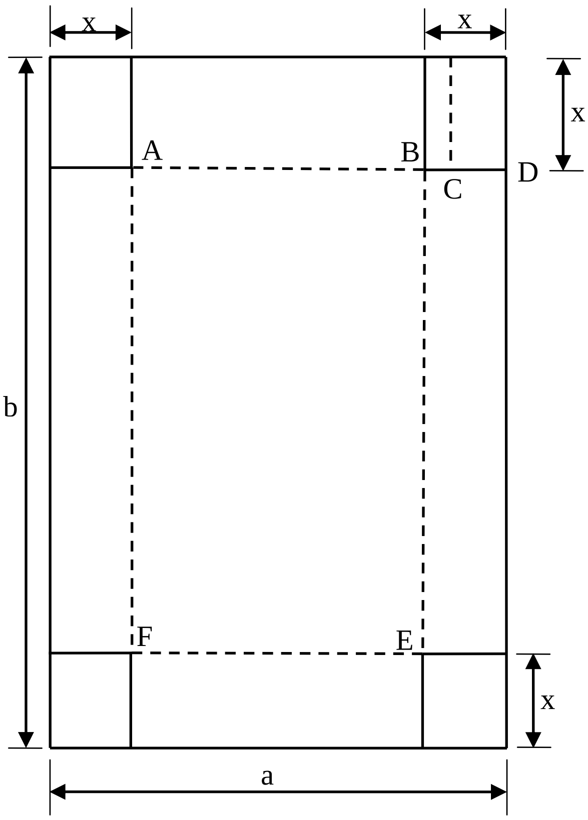



Figura 1

Sejam: BD = x, CD = $\frac{2}{3}$ x , AB = EF = a – 2x, AF = BE = b – 2x

[4] Frederickson, Greg. N. A new wrinkle on an old folding problem. In: The College Mathematics Journal. Vol. 34. Nº 4, Sepetember 2003.

Agora, considere a seguinte figura (Figura 2):

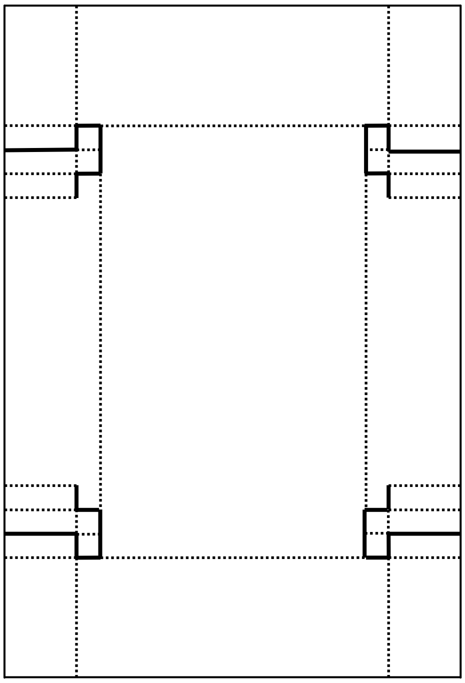


Figura 2

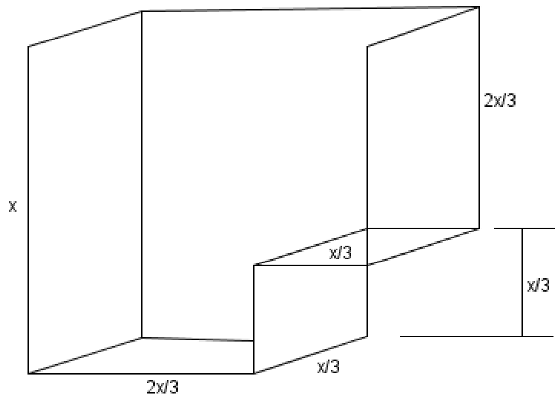
Fazendo o corte seguindo as poligonais em negrito (veja na figura acima), e depois dobrando-os onde está pontilhado, obtém-se quatro reentrâncias, ou seja, para cada cada canto, há uma reentrância.

O volume do container é $V = (a – 2x)(b – 2x)x + 4.Vol._{reentrância}$

E o volume da reentrância é dado por:

$$Vol._{reentrância} = \frac{2x}{3} \cdot \frac{x}{3} \cdot x + \frac{x}{3} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{2x^3}{9} + \frac{2x^3}{27} = \frac{8x^3}{27} = \left(\frac{2x}{3}\right)^3$$

Para melhor ilustrar o cálculo do volume da reentrância, veja o detalhamento tridimensional da reentrância na figura abaixo.




O volume do container será V= $(a-2x)(b-2x)x+4\left(\frac{8x^3}{27}\right)=\frac{140x^3}{27}-(2a+2b)x^2+abx$

Com técnicas do Cálculo Diferencial, vamos agora calcular o valor otimizado do volume.

Tomando a primeira derivada com relação a *x*, obtemos $\frac{140x^2}{9}-(4a+4b)x+ab$. O valor otimizado será $x=\left(\frac{9}{70}\right)\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2-\frac{17ab}{9}}\right)$m.

A nova abordagem é melhor do que o método tradicional quando *a* e *b* são iguais, e perde muito de sua vantagem na medida em que estes valores diferem entre si. Para os valores 3m e 8m, o método tradicional fornece x = 2/3m e um volume de 200/27 ≅ 7,4074m$^2$, enquanto que este método fornece x = (3/70)(33 - $\sqrt{249}$) ≅ 0,73801m, e um volume de aproximadamente 7,8140m$^2$. Mesmo assim, este ganho é superior a 5%.

A figura abaixo mostra como ficaria o container depois das dobras e soldas.

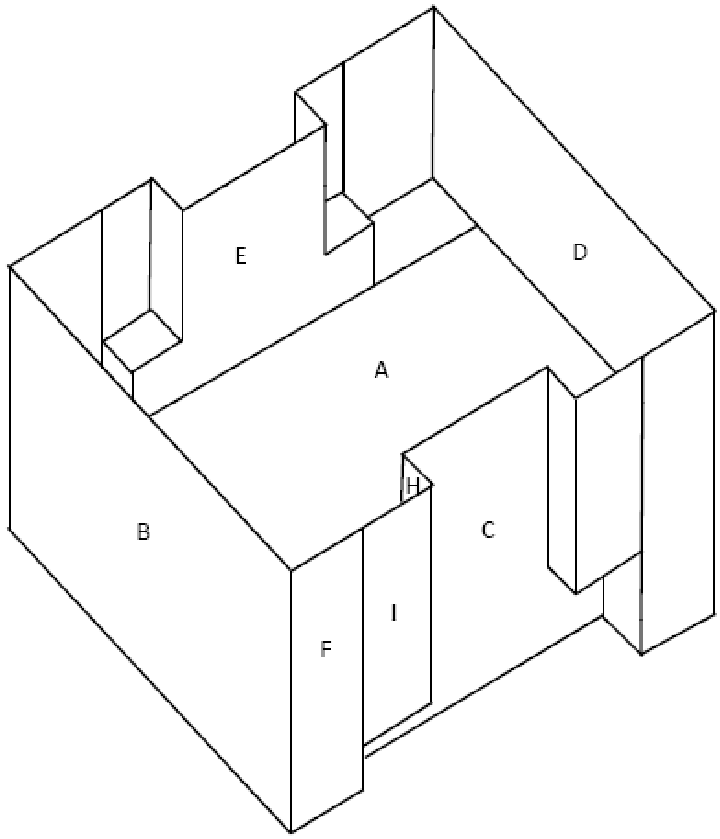
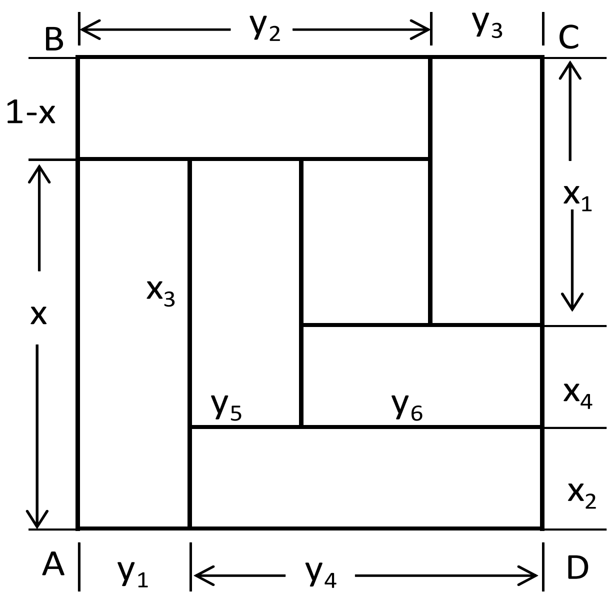



Figura 3

## 2.6 **Ladrilhamento**[5] **e o polinômio** $196x^3 - 294x^2 + 128x - 15$

Decompor um quadrado de lado 1 em sete retângulos com áreas iguais, de modo que cada lado do quadrado seja interceptado por uma das linhas de divisão. “divisão primária do quadrado em 7 partes”




Solução:

$$7xy_1 = 1^2 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{7x}$$

$$7(1-x)y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = \frac{1}{7(1-x)}$$

$$y_2 + y_3 = 1^2 = 1$$

$$y_3 = 1 - y_2 = 1 - \frac{1}{7(1-x)} = \frac{7-7x-1}{7(1-x)} = \frac{6-7x}{7(1-x)} \Rightarrow y_3 = \frac{7-7x}{7(1-x)}$$

[5] STEINHAUS, H. One hundred problems in elementary mathematics. Dover Publications. 1964.

$$7x_1y_3 = 1$$

$$x_1 = \frac{1}{7y_3} = \frac{1}{\frac{7(6-7x)}{7(1-x)}} = \frac{1-x}{6-7x} \Rightarrow x_1 = \frac{1-x}{6-7x}$$

$$y_1 + y_4 = 1$$

$$y_4 = 1 - y_1 = 1 - \frac{1}{7x} = \frac{7x-1}{7x} \Rightarrow y_4 = \frac{7x-1}{7x}$$

$$7x_2y_4 = 1^2 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{7y_4} = \frac{1}{7(7x-1)} = \frac{x}{7x-1}$$

$$x_2 = \frac{x}{7x-1}$$

$$x_3 = x - x_2 = x - \frac{x}{7x-1} = \frac{7x^2 - x - x}{7x-1} = \frac{x(7x-2)}{7x-1}$$

$$x_3 = \frac{x(7x-2)}{7x-1}$$

$$7x_3y_5 = 1^2 = 1$$

$$y_5 = \frac{1}{7x_3} = \frac{1}{7\frac{x(7x-2)}{7x-1}} = \frac{7x-1}{7x(7x-2)}$$

$$y_5 = \frac{7x-1}{7x(7x-2)}$$

$$y_6 = y_4 - y_5 = \frac{7x-1}{7x} - \frac{7x-1}{7x(7x-1)} = \frac{(7x-1)(7x-2)-(7x-1)}{7x(7x-2)}$$

$$y_6 = \frac{(7x-1)(7x-3)}{7x(7x-2)}$$

$$7x_4x_6 = 1^2 = 1$$

$$x_4 = \frac{1}{7y_6} = \frac{1}{\frac{7(7x-1)(7x-3)}{7x(7x-2)}}$$

$$x_4 = \frac{x(7x-2)}{(7x-1)(7x-3)}$$

$$x_1 + x_4 + x_2 = 1$$

$$1 = \frac{1-x}{6-7x} + \frac{x(7x-2)}{(7x-1)(7x-3)} + \frac{x}{7x-1} =$$

$$\frac{(7x-1)(7x-3)(1-x) + (6-7x)(7x-2)x + (7x-3)(6-7x)x}{(7x-1)(7x-3)(6-7x)} = 1$$

$$\frac{(49x^2 - 21x - 7x + 3)(1-x) + (42x - 12 - 49x^2 + 14x)x + (42x - 49x^2 - 18 + 21x)x}{(49x^2 - 21x - 7x + 3)(6-7x)} = 1$$

$$\frac{(49x^2 - 28x + 3)(1-x) + (-49x^2 + 56x - 12)x + (-49x^2 + 63x - 18)x}{(49x^2 - 28x + 3)(6-7x)} = 1$$

$$-147x^3 + 196x^2 - 61x + 3 = -343x^3 + 490x^2 - 189x + 18$$

$$(343-147)x^3 + (196-490)x^2 + (189-61)x + (3-18) = 0$$

$$196x^3 - 294x^2 + 128x - 15 = 0$$

Possíveis números racionais $\frac{p}{q}$, $p \mid -15$ e $q \mid 196 = 2^2.7^2$

onde

$p = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$

$q = \pm 1, \pm 2, \pm 2^2, \pm 7, \pm 14, \pm 28, \pm 49, \pm 98, \pm 196$

temos

$$\frac{p}{q} = \left\{ \begin{array}{l} \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2^2}, \pm\frac{1}{7}, \pm\frac{1}{14}, \pm\frac{1}{28} \pm, \frac{1}{49}, \pm\frac{1}{98}, \pm\frac{1}{196}, \\ \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2^2}, \pm\frac{3}{7}, \pm\frac{3}{14}, \pm\frac{3}{28}, \pm\frac{3}{49}, \pm\frac{3}{98}, \pm\frac{3}{196}, \\ \pm 5, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{2^2}, \pm\frac{5}{7}, \pm\frac{5}{14}, \pm\frac{5}{28}, \pm\frac{5}{49}, \pm\frac{5}{98}, \pm\frac{5}{196}, \\ \pm 15, \pm\frac{15}{2}, \pm\frac{15}{2^2}, \pm\frac{15}{7}, \pm\frac{15}{14}, \pm\frac{15}{28}, \pm\frac{15}{49}, \pm\frac{15}{98}, \pm\frac{15}{196} \end{array} \right\}$$

$p(1) = -15$

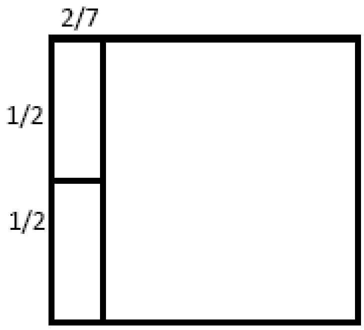
$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 196\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 294\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 128\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 15 = \frac{196}{8} - \frac{294}{4} + \frac{128}{2} - 15 =$$

$$= \frac{2^2}{2^3} - \frac{2.3.7^2}{2^2} + \frac{2^7}{2} - 15 = \frac{7^2}{2} - \frac{3.7^2}{2} + 2^6 - 15 =$$

$$= \frac{49 - 147 + 128 - 30}{2} = 0$$

Portanto, $x = \frac{1}{2}$ é raiz, mas não serve, porque

$x = \frac{1}{2}$ implica $1 - x = 1 - \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{7.\frac{1}{2}}$, $y_2 = \frac{1}{7\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{7}$, que não é interessante.




$$
\begin{array}{rrrr|l}
196x^3 & -294x^2 & +128x & -15 & x - \frac{1}{2} \\
\hline
-196x^3 & +98x^2 & +0x & +0 & 196x^2 - 196x + 30 = q(x) \\
\hline
 & -196x^2 & +128x & -15 & \\
 & 196x^2 & -98x & +0 & \\
\hline
 & & 30x & -15 & \\
 & & -30x & +15 & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$q(x) = 196x^2 - 196x + 30$

$\Delta = (-196)^2 - 4(496)30 = 38416 - 23520 = 14896$

$$x = \frac{196 \pm \sqrt{14896}}{2(196)} = \frac{14^2 \pm \sqrt{196.76}}{2.14^2} = \frac{14^2 \pm 14\sqrt{76}}{2.14^2}$$

$$= \frac{14 \pm \sqrt{76}}{2.14} = \frac{7.2 \pm 2\sqrt{19}}{2.14} = \frac{7 \pm \sqrt{19}}{14}$$

As raízes de q(x) são $\frac{7+\sqrt{19}}{14}$ e $\frac{7-\sqrt{19}}{14}$

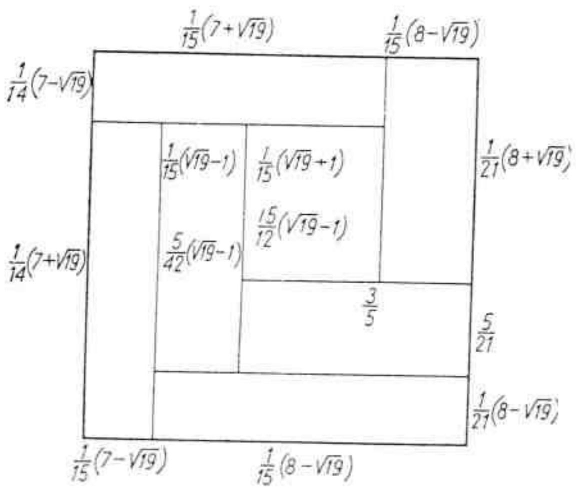
Para $x = \dfrac{7 - \sqrt{19}}{14}$ , temos

$$y_6 = \frac{(7x - 1)(7x - 3)}{7x(7x - 2)} = \frac{\left(7\left(\frac{7-\sqrt{19}}{14}\right)-1\right)\left(7\left(\frac{7-\sqrt{19}}{14}\right)-3\right)}{7\left(\frac{7-\sqrt{19}}{14}\right)\left(7\left(\frac{7-\sqrt{19}}{14}\right)-2\right)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{7-\sqrt{19}-2}{2}\right)\left(\frac{7-\sqrt{19}-6}{2}\right)}{\left(\frac{7-\sqrt{19}}{2}\right)\left(\frac{7-\sqrt{19}-4}{2}\right)} = \frac{5-\sqrt{19}}{7-\sqrt{19}}\,\frac{1-\sqrt{19}}{5-\sqrt{19}} < 0$$, que não é solução porque medida de lado deve ser positiva.

Portanto, $x = \dfrac{7 + \sqrt{19}}{14}$ é a solução procurada.

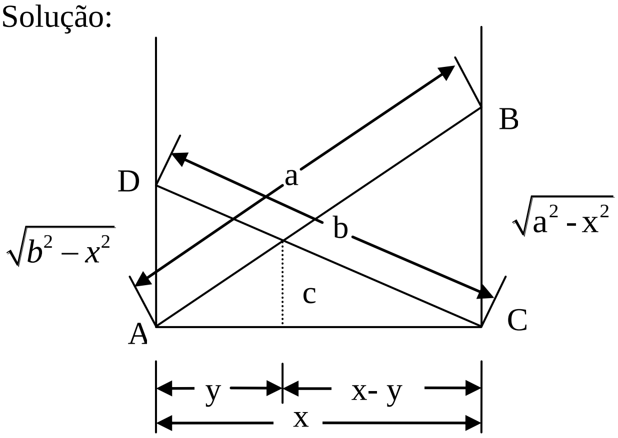
Apresentamos, a seguir a figura com as medidas encontradas acima.



## 2.7 **Cabos cruzados**[6] **e um polinômio de grau 8**

Na figura, $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paredes de 2 casas, $\overline{AC}$ é a largura da rua, $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$ são cabos esticados. Os cabos se cruzam a *c* unidades de comprimento do chão. Determinar $\overline{AC}$.

Solução:

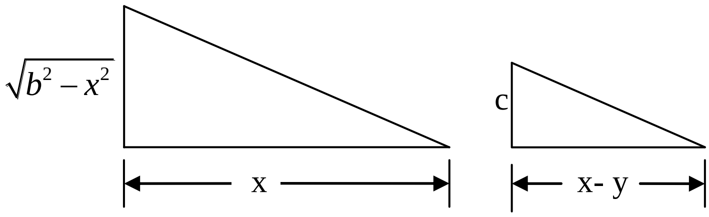



Sejam $\overline{AC} = x$, $\overline{AB} = a$, $\overline{DC} = b$

Então $\overline{AD} = \sqrt{b^2 - x^2}$ e $\overline{BC} = \sqrt{a^2 - x^2}$ (Teorema de Pitágoras)

Semelhança de triângulos:

$$\frac{x - y}{x} = \frac{c}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$




$$1 - \frac{y}{x} = \frac{c}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

e

$$\frac{y}{x} = \frac{c}{\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad (1)$$

Elevando-se ao quadrado os dois membros:

$$\left(1 - \frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{c}{\sqrt{b^2 - x^2}}\right)^2 \qquad (2)$$

Substituindo-se (1) em (2):

$$\left(1 - \frac{c}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2 = \left(\frac{c}{\sqrt{b^2 - x^2}}\right)^2$$

---

[6] POSAMENTIER, Alfred S., SALKIND, Charles T. Challenging Problems in Geometry. Dover Publications, Inc. New York. 1988

$$1-\frac{2c}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{c^2}{a^2-x^2}=\frac{c^2}{\sqrt{b^2-x^2}}$$

$$\frac{-2c}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{c^2}{b^2-x^2}-\frac{c^2}{a^2-x^2}-1=\frac{c^2\;\; a^2-x^2\;\; -c^2\;\; b^2-x^2\;\; -\;\; b^2-x^2\;\;\; a^2-x^2}{b^2-x^2\;\;\; a^2-x^2}$$

$$\frac{4c^2}{a^2-x^2}=\frac{\left[a^2c^2-b^2c^2-a^2b^2-\;\; c^2-c^2-a^2-b^2\;\; x^2-x^4\right]^2}{b^2-x^2\;\;{}^2\;\; a^2-x^2\;\;{}^2}$$

$$4c^2=\frac{\left[a^2c^2-a^2b^2-b^2c^2+\;\; a^2+b^2\;\; x^2-x^4\right]^2}{b^2-x^2\;\;{}^2\;\; a^2-x^2}$$

$$4c^2\;\; b^2-x^2\;\;{}^2\;\; a^2-x^2\;\;=\left[a^2c^2-a^2b^2-b^2c^2+\;\; a^2+b^2\;\; x^2-x^4\right]^2$$

Fazendo $r=a^2c^2-a^2b^2-b^2c^2$ e $s=a^2+b^2$, tem-se

$$4c^2\;\; b^4-2b^2x^2+x^4\;\;\; a^2-x^2\;\;=\left[r+sx^2-x^4\right]^2$$

$$4a^2c^2\;\; b^4-2b^2x^2+x^4\;\; -4c^2\;\; b^4-2b^2x^2+x^4\;\;=\left[\;\; r+sx^2\;\; -x^4\right]^2=r^2+2rsx^2+s^2x^4-2rx^4-2sx^6+x^8$$

Mas

$$4a^2c^2b^4-8a^2b^2c^2x^2+4a^2c^2x^4-4c^2b^4x^2+8b^2c^2x^4-4c^2x^6=$$

$$=4a^2c^2b^4-\;\; 8a^2b^2c^2+4c^2b^4\;\; x^2+\;\; 4a^2c^2+8b^2c^2\;\; x^4-4c^2x^6$$

Daí,

$$x^8-\;\; 2s+4c^2\;\; x^6+\;\; s^2-2r+4a^2c^2-8b^2c^2\;\; x^4+\;\; 2rs+8a^2b^2c^2+4c^2b^4\;\; x^2+r^2-4a^2c^2b^4=0$$

Onde $r=a^2c^2-a^2b^2-b^2c^2$ e $s=a^2+b^2$

Exemplo numérico:

$\overline{AB}$ = 8m = b

$\overline{CD}$ = 10m = a

c = 4m

Resposta: $x^{'} \cong 3,8m$ ou $x^{"} \cong 7,6m$

Com o uso do software iterativo Matlab, as instruções que vêm a seguir dão as raízes deste polinômio de grau 8.

```
>>a=10;
>>b=8;
>>c=4;
>>s=a^2+b^2;
>>r=a^2*c^2-a^2*b^2-b^2*c^2;
>>p=[1 0 –(2*s-4*c^2) 0 (s^2-2*r-4*a^2*c^2-8*b^2*c^2) 0 (2*r*s+8*a^2*b^2*c^2+4*c^2*b^^4)]
>>raizes=roots (p)

raízes =
-9.8018 + 0.4418i
-9.8018 - 0.4418i
 9.8018 + 0.4418i
 9.8018 - 0.4418i
 7.6076
-7.6076
  3.7899
-3.7899

>> format long g
>> raízes
Raízes =
-9.80181658122849 +  0.441768998702424i
-9.80181658122849 -  0.441768998702424i
  9.80181658122848 +  0.441768998702468i
  9.80181658122848 -  0.441768998702468i
```

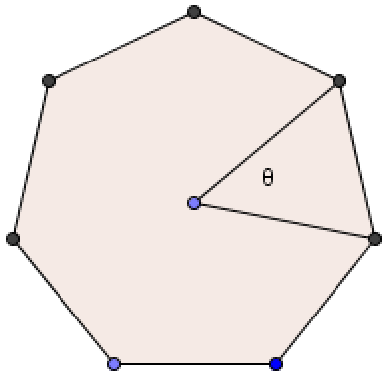
7.60758992500925

-7.60758992500925

3.78994441189253

-3.78994441189253

## 2.8 **O heptágono regular não é construtível com régua e compasso**[7] **e o polinômio $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$.**




Justificativa:

i) $\theta = \dfrac{360^0}{7} = \dfrac{2\pi}{7}$ rad é o ângulo central associado a um dos lados do heptágono regular inscrito;

ii) $\cos 3\theta = \cos 4\theta$

De fato:

$$\cos 3\theta = \cos\frac{6\pi}{7} = \cos\left(\frac{7\pi - \pi}{7}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = -\cos\frac{\pi}{7}$$

e

$$\cos 4\theta = \cos\frac{8\pi}{7} = \cos\left(\frac{7\pi + \pi}{7}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\cos\frac{\pi}{7}$$

iii) $x = \cos\dfrac{2\pi}{7} = \cos\theta$ satisfaz $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$

Explicação:

Da Trigonometria, sabe-se que

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, e $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

Substituindo em $\cos 3\theta = \cos 4\theta$, temos

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$$

---

[7] EVES, H. Introdução à história da matemática; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas. Editora da Unicamp. 2004.

$4x^3 - 3x = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$f(x) = 8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0$

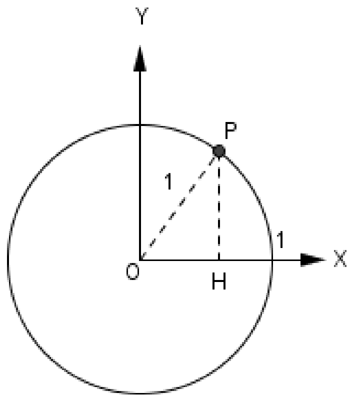
Por inspeção, x = 1 é raiz desta equação

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
8x^4 & -4x^3 & -8x^2 & +3x & +1 & \underline{x-1} \\
-8x^4 & +8x^3 & +0x^2 & +0x & +0 & 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 \\
\hline
 & 4x^3 & -8x^2 & +3x & +1 & \\
 & -4x^3 & +4x^2 & +0x & +0 & \\
\hline
 & & -4x^2 & +3x & +1 & \\
 & & 4x^2 & -4x & +0 & \\
\hline
 & & & -x & +1 & \\
 & & & x & -1 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Como $x = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 1 \neq 0$ e $p(x) = (x-1)(8x^3 + 4x^2 - 4x - 1)$ tem $x = \cos\frac{2\pi}{7}$ como raiz, então $x = \cos\frac{2\pi}{7}$ é raiz de $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$.

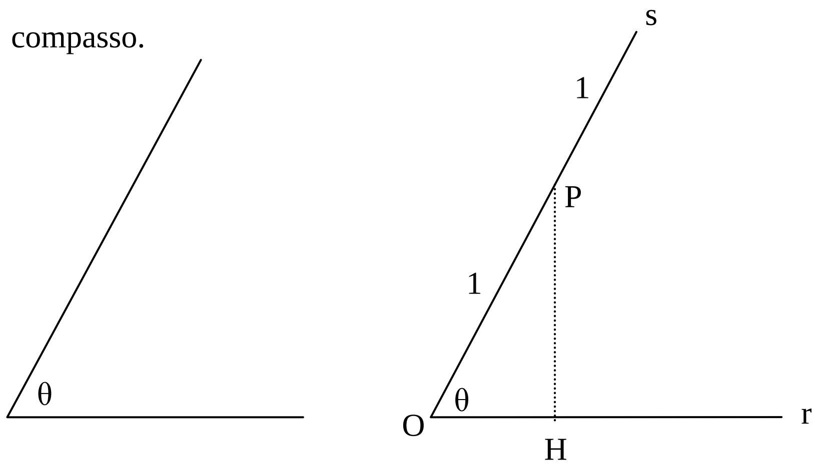
iv) $x = \cos\theta$ é construtível com régua e compasso se e somente $\theta$ é construtível com régua e compasso.

De fato:




($\Rightarrow$) $x = \cos\theta = OH$ é conhecido. Traçando a reta perpendicular a OH no ponto H, obtém-se um ponto P sobre o círculo unitário (conforme figura acima). O ângulo $P\hat{O}H = \theta$, e assim $\theta$ é construído com régua e compasso.

($\Leftarrow$) A hipótese é que o $\theta$ da figura pode ser construído com régua e compasso. Sobre a semi-reta $\overrightarrow{Os}$, marcamos o ponto P, de modo que OP = 1. De P, traçamos uma perpendicular à semi-reta $\overrightarrow{Or}$, obtendo H. daí, $OH = x = \cos\theta$ é obtido com régua e compasso.




v) Teorema (Wantzel, 1837) Se uma equação de grau 3 (cúbica) com coeficientes racionais não tem raiz racional, então nenhuma de suas raízes é construtível a partir do corpo $\mathbb{Q}$.

A prova deste teorema pode ser encontrada no livro "O que é Matemática", de Richard Courant/H. Robbins, Editora Ciência Moderna. 2000.
Também nos livros (encantadores) de Gilberto G. Garbi, o Teorema de Wantzel é abordado.

vi) O heptágono regular não é construtível com régua e compasso.

Se $\theta = \dfrac{360^o}{7}$ fosse construtível, $x = \cos\theta$ seria construtível (item iv).

Por outro lado, $x = \cos\theta = \cos\dfrac{2\pi}{7}$ é raiz de $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Se este polinômio tivesse uma raiz racional $\dfrac{p}{q}$ irredutível, $p|-1$ e $q|8$. As possibilidades seriam $p = \pm 1$ e $q = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$, e $\dfrac{p}{q} = \pm 1, \pm\dfrac{1}{2}, \pm\dfrac{1}{4}, \pm\dfrac{1}{8}$. Como nenhuma destas frações é raiz, a cúbica não tem raízes racionais.
Pelo teorema de Wantzel, segue que nenhuma de suas raízes é construtível com régua e compasso, e assim, a raiz $x = \cos\dfrac{2\pi}{7}$ não é construtível.

## 3.1 Identificando números irracionais através de polinômios[8]

"Se o número racional $\frac{r}{s}$ (*r* e *s* inteiros primos entre si) é raiz do polinômio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, com coeficientes inteiros, então *r* é divisor de $a_0$ e *s* é divisor de $a_n$"

Aplicando esse resultado ao polinômio $p(x) = x^n - a$ (*a* tal que $\sqrt[n]{a}$ não é exata), temos $a_n = 1$ e $a_0 = -a$; logo, se um número racional $\frac{r}{s}$ é raiz, $s = \pm 1$, o que mostra que $\frac{r}{s}$ é um número inteiro. Como, por hipótese, nenhum inteiro *d* satisfaz $d^n = a$, concluímos que o polinômio $p(x) = x^n - a$ não admite raízes racionais. Como $\sqrt[n]{a}$ é raiz, $\sqrt[n]{a}$ não pode ser um número racional, sendo, portanto, irracional.

Exemplos:

a) O número $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ é irracional.

Verificação: fazendo $\sqrt{3} - \sqrt{2} = a$, ou, ainda, $\sqrt{3}^{\,2} = a + \sqrt{2}^{\,2}$, obtém-se a igualdade $1 - a^2 = 2\sqrt{2}a$, a qual, depois de se elevar ao quadrado mais uma vez, mostra ser *a* raiz do polinômio $x^4 - 10x^2 + 1$. Pelo resultado mostrado acima, as únicas raízes possíveis desse polinômio seriam $\pm 1$, e como, por verificação direta, esses números não são raízes, *a* não pode ser racional.

b) O número $\sqrt[3]{2}$ é irracional.

Verificação: fazendo $\sqrt[3]{2} = a$, $2 = a^3$, obtém-se a igualdade $a^3 = 2$, a qual mostra ser *a* raiz do polinômio $x^3 - 2$. Pelo resultado mostrado acima, as únicas raízes possíveis desse polinômio seriam $\pm 2$, e como, por verificação direta, esses números não são raízes, *a* não pode ser racional.

---

8 TAMAROZZI, A. C. **Identificando números irracionais através de polinômios**. In: Revista do professor de matemática, nº 42. SBM. Rio de Janeiro. 2000.

c) O número $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ é irracional.

Verificação: fazendo $\sqrt{1+\sqrt{2}} = \mathrm{a}$, ou ainda, $1+\sqrt{2} = \mathrm{a}^2$, obtém-se a igualdade $a^2 - 1 = \sqrt{2}$, a qual depois de se elevar ao quadrado mais uma vez, mostra ser *a* raiz do polinômio $\mathrm{x}^4 - 2\mathrm{x}^2 - 1$. Pelo resultado mostrado acima, as únicas raízes possíveis desse polinômio seriam $\pm 1$, e como, por verificação direta, esses números não são raízes, *a* não pode ser racional.

## 4.1 Alguns fatos surpreendentes[9]

a) **O polinômio 100x(x + 1) + y(10 – y)**

"O produto de dois números (naturais) de dois algarismos cujos algarismos das dezenas são iguais e os algarismos das unidades somam 10 pode ser obtido instantaneamente".

**Exemplo 1**. Com 92.98, o produto é 9016, que é obtido procedendo-se da seguinte forma: multiplica-se o algarismo das dezenas, 9, pelo seu sucessor, 10, encontrando 90, cujos algarismos serão, nessa ordem, os algarismos dos milhares e das centenas da resposta. Acrescenta-se à direita de 90 o produto dos algarismos das unidades, 2.8 ou 16, obtendo-se 9016.

**Exemplo 2.** Com 61.69, o produto é 4209, que é obtido procedendo-se da seguinte forma: multiplica-se o algarismo das dezenas, 6, pelo seu sucessor, 7, encontrando 42, cujos algarismos serão, nessa ordem, os algarismos dos milhares e das centenas da resposta. Acrescenta-se à direita de 42 o produto dos algarismos das unidades, 1.9 ou 9, obtendo-se 4209.

Podemos aumentar a confiança no processo, aplicando-o a vários outros casos, mas muitos exemplos não constituem uma demonstração. Porém, se usarmos binômios para representar os números a serem multiplicados, podemos dar uma demonstração que independe dos exemplos escolhidos.

Represente por $a \neq 0$ o algarismo das dezenas dos dois números considerados e por $b$ o algarismo das unidades do primeiro número, $a, b \in \{0,1,2,...,9\}$. Então o algarismo das unidades do segundo número será 10 - b.

Logo, 10a + b é o primeiro número e 10a + (10 - b), o segundo número.

Seu produto é:

$$(10a + b) . (10a + 10 - b) = \ldots = 100a(a+1) + b(10 - b)$$

---

[9] MULLIGAN, C. H. In: COXFORD, A. F. & SHULTE. **As idéias da Álgebra**. Editora Atual. São Paulo. 1995.

b) **O polinômio x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1**

"Se somarmos 1 ao produto de quatro inteiros consecutivos, o resultado sempre será um quadrado perfeito".

Alguns exemplos, como descritos abaixo, nos levam a suspeitar que essa afirmação é sempre verdadeira.

$$1.2.3.4+1=25=5^2\ ,\ \ 5.6.7.8+1=1681=41^2$$

$$97.98.99.100+1 = 94109401 = (9701)^2\ ,\ \ 37.38.39.40 + 1 = (1481)^2$$

Para obter uma prova desse fato, vamos representar os inteiros consecutivos por:

n, n+ l, n+2 e n + 3.

Então

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=n^4+6n^3+11n^2+6n+1 \qquad (1)$$

Temos, agora, dois procedimentos possíveis.

Nota-se que o quadrado perfeito, nos nossos exemplos numéricos, é o quadrado de 1 mais o produto do primeiro pelo último termo da seqüência. Podemos observar, por exemplo, que

$$1+4.5.6.7=841=29^2=(1+4.7)^2$$

Expressando em polinômios, escrevemos

$$\left[1+n(n+3)\right]^2=n^4+6n^3+11n^2+6n+1 \qquad (2)$$

Isso, além de confirmar que (1) é um quadrado perfeito, também nos diz de que número é o quadrado perfeito.

Outra maneira de proceder é trabalhar diretamente a partir de (1) e conjecturar que seria bom fatorar o segundo membro e verificar que ele é um quadrado perfeito. Esse quadrado teria para um *a* conveniente, a forma:

$$(n^2+an+1)^2=n^4+2an^3+(2+a^2)n^2+2an+1 \qquad (3)$$

Igualando os coeficientes em (1) e (3), temos:

$2a=6$ e $2+a^2=11$, ou seja, a = 3.

Então,

$$n^4+6n^3+11n^2+6n+1=(n^2+3n+1)^2$$

NOTA**. Adivinhação**: peça para alguém (com máquina de calcular) pensar em um número *n* e fazer x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1. Ele te fornece o resultado *A*. Você (com a sua máquina de calcular) faz $\sqrt{A}$ e resolve $n^2 + 3n + (1 - \sqrt{A}) = 0$

c) **O polinômio** $\frac{1}{8}\mathbf{x(x+1)(x+2)(x+3)}$

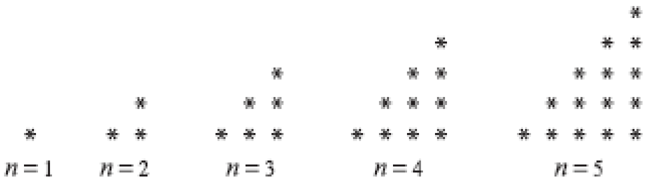
"O quociente da divisão por 8 de um produto de quatro inteiros positivos consecutivos é um número triangular".

Definimos número triangular como sendo um número da forma $\frac{n(n+1)}{2}$ para *n* natural positivo.

Logo, esses números são:

l, 3, 6, 10, 15, 21, 28... (fazendo n = l, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...).

A razão do nome triangular é explicada pela figura:




Testamos o resultado no exemplo:

(3 · 4 · 5 · 6) ÷ 8 = 45 que é o número triangular para n = 9.

Para a prova do resultado, escrevemos o produto de quatro inteiros consecutivos, dividido por 8, como:

$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{8} = \frac{m(m+3)}{2} \cdot \frac{(m+1)(m+2)}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\frac{m^2+3m}{2} \cdot \frac{m^2+3m+2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{m^2+3m}{2} \cdot \left(\frac{m^2+3m}{2} + 1\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{k(k+1)}{2}, \text{ onde } \frac{k(k+1)}{2} \in \mathbb{N}$$

(quando *m* é par, $m^2 = 4s^2$ e $3m = 6s$ e quando $m = 2r + 1$ é ímpar, $3m = 6r + 3$, $m^2 = (2r + 1)^2 = 2(2r^2 + 2r) + 1$ e $\frac{m^2+3m}{2} = \frac{2(r^2+2r)+1+6r+3}{2} = 2r^2 + 8r + 2 \in \mathbb{N}$).

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desta forma, procuramos neste trabalho estudar os polinômios em vários graus, utilizando a técnica de resolução de problemas, do ponto de vista de suas aplicações na geometria, visando a ilustrar e contextualizar o assunto para que os alunos possam ter uma melhor apreciação do assunto, bem como apresentar alguns fatos interessantes e curiosos sobre os mesmos

GARBI(2007) afirma que "Qualquer problema que possa ser solucionado através dos números certamente será tratado, direta ou indiretamente, por meio de equações". Entendemos que um bom conhecimento sobre polinômios é de vital importância para a manipulação de equações.

Uma das vantagens de se trabalhar com problemas geométricos é que estes permitem a visualização e a tangibilidade por parte dos alunos, propiciando aos mesmos uma agradável aprendizagem sobre o assunto.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


BARBEAU, M. – **Polynomials**, Reine et Servani des Sciences, Trad. De Saint-Genne, Paris, 1953.

BOYER, C. **História da Matemática**. 6ª edição, editora Blücher. 1974.

CARNEIRO, J. P. **Equações Algébricas de grau maior que dois: assunto para o ensino médio?** In: Revista do professor de matemática, nº 40. Rio de Janeiro. SBM, 1999.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**; tradução: Hygino H. Domingues. Campinas. Editora da Unicamp. 2004.

FREDERICKSON, Greg. N. **A new wrinkle on an old folding problem**. In: The College Mathematics Journal. Vol. 34. Nº 4, Sepetember 2003.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**, 2ª edição. Editora Livraria da Física. 2007.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar,** vol. 6. 7ª edição. Editora Atual. São Paulo. 1985.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, WAGNER, Eduardo, MORGADO, Augusto César; **A matemática do ensino médio**. Vols. 1, 2 3 e 4. Coleção do professor de matemática. SBM. Rio de Janeiro. 2005.

MULLIGAN, C. H. In: COXFORD, A. F. & SHULTE. **As idéias da Álgebra**. Editora Atual. São Paulo. 1995.

POOLE, D. **Álgebra Linear**. 1ª edição. Editora Thomson. São Paulo. 2004.

POSAMENTIER, Alfred S., SALKIND, Charles T. **Challenging Problems in Geometry**. Dover Publications, Inc. New York. 1988.

STEINHAUS, H. **One hundred problems in elementary mathematics**. Dover Publications. 1964.

TAMAROZZI, A. C. **Identificando números irracionais através de polinômios**. In: Revista do professor de matemática, nº 42. SBM. Rio de Janeiro. 2000.

WATANABE, Renate, MEGA, Élio (compiladores). **Olimpíadas Brasileiras de Matemática**. **1ª a 8ª**. Problemas e resoluções. Comissão de Olimpíadas da SBM. Editora Núcleo. São Paulo. 1988.