UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA –CFM
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA MATEMÁTICA

QUANTIFICADORES
ALGUNS ASPECTOS TEÓRICOS E PRÁTICOS

Günter Worm

Florianópolis, junho de 2004

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA – UFSC
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA – CFM
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA MATEMÁTICA

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

QUANTIFICADORES
ALGUNS ASPECTOS TEÓRICOS E PRÁTICOS

Orientando: Günter Worm
Orientadora: Carmem Susane Comitre Gimenez

Florianópolis, junho de 2004

SUMÁRIO

Introdução.. 4
Capítulo I – História da Lógica...5
I. 1) – Período Clássico: Séc IV a.C. – Séc XIX d.C. 5
I. 2) – Período Moderno: Séc XIX – Séc XX...9
I. 3) – Período Contemporâneo: Séc XX até hoje..12
Capítulo II – Tópicos Teóricos em Lógica..15
II. 1) A Lógica Simbólica...15
II. 2) O cálculo proposicional: conectivas..17
II. 3) O Cálculo de Predicados...22
II. 4) Quantificadores..25
Capítulo III – Teoremas e Quantificadores...30
III. 1) – Geometria Espacial – Determinação do Plano...30
III. 2) – Geometria Plana – Inscrição de polígonos..35
III. 3) – Álgebra – Teorema Fundamental da Aritmética..37
III. 4) – Análise – Seqüências..41
Capítulo IV – Análise Experimental..43
IV. 1) – Introdução..43
IV. 2) – Cópia do Questionário..43
IV. 3) – Análise a Priori..44
IV. 4) – Análise dos Resultados...58
Conclusão...67
Referências Bibliográficas..69

INTRODUÇÃO

Certa vez, ao pedir revisão da segunda prova de Introdução ao Cálculo, surpreendi-me com a argumentação lançada pela professora da disciplina em não me ceder aqueles 0,5 preciosos pontos da questão: “Seu raciocínio está correto, mas a ordem dos quantificadores nesta definição que você escreveu, torna-a falsa!”. Então, após explicar-me que “para todo, existe” é diferente de “existe, para todo” passei não só a admitir meu erro, mas também a ter mais curiosidade no papel dos quantificadores na Matemática, e percebi a influência sutil que os quantificadores exercem nas definições de propriedades ou axiomas, bem como nas demonstrações de teoremas matemáticos.

O presente Trabalho de Conclusão de Curso em seu primeiro capítulo identifica a origem histórica do assunto em questão, tratando do desenvolvimento da Lógica desde a Antigüidade aos tempos modernos. No segundo capítulo apresenta os tópicos de lógica básicos ao entendimento desta ferramenta, tais como o simbolismo e o cálculo proposicional. O terceiro capítulo tem como objetivo analisar a importância presencial dos quantificadores em teoremas diversos. Reservou-se o quarto capítulo para a verificaçao do conhecimento deste assunto em alunos pré-vestibulandos, visto que, teoricamente, são alunos com maior conhecimento geral em Matemática, tornando-os uma boa amostra experimental já que o assunto tratado neste trabalho não é exposto em uma série específica, aparecendo, geralmente, ao escrever definições ou teoremas de Álgebra, Geometria, entre outros tópicos ministrados ao longo do ensino fundamental e médio.

CAPÍTULO I
HISTÓRIA DA LÓGICA

I. 1) Período Clássico: Séc IV a.C. – Séc XIX d.C.

A) Lógica Aristotélica

O estudo da Lógica iniciou-se pelos filósofos gregos **Parmênides** e **Platão**. **Parmênides** nasceu em Eléia, na Magna Grécia (sul da Itália), por volta de 515 a.C. Foi legislador em Eléia, onde teria também fundado uma escola semelhante aos institutos pitagóricos, para o ensino da dialética – a arte de argumentar e discutir idéias.

Platão nasceu em Atenas, em 428 ou 427 a.C. e travou relação com **Sócrates** - mais velho do que ele quarenta anos – com quem gozou por oito anos do ensinamento e da amizade do mestre. Depois da morte do mestre, Platão retirou-se com outros socráticos para junto de **Euclides**, em Mégara. Daí deu início a suas viagens, e fez um vasto giro pelo mundo para se instruir (390-388).

Pelo ano de 387, em Atenas, junto aos jardins de Academo, Platão fundava a sua célebre escola, a qual tomou o nome famoso de Academia.

Mas foi **Aristóteles** quem sistematizou e definiu a lógica como a conhecemos, constituindo-a como uma ciência autônoma. Falar de Lógica durante séculos era o mesmo que falar da lógica aristotélica. Apesar dos enormes avanços da lógica, sobretudo a partir do século XIX, a matriz aristotélica persiste até aos nossos dias.

Aristóteles nasceu em Estagira, colônia grega da Trácia, no litoral norte do mar Egeu, em 384 a.C. Aos dezoito anos, em 367, foi para Atenas e ingressou na Academia Platônica, onde ficou por vinte anos chegando inclusive a ascender ao cargo de professor. Após a morte de Platão, em 347, abandonou a Academia provavelmente por divergências quanto à escolha de Espeusito, sobrinho de Platão, para a direção da escola.

Iniciou então uma atribulada viagem que o levou a Assos, na Ásia Menor, onde se estabelecera uma comunidade de alunos da Academia, protegida por Hermias, rei de Atárnea. Este lhe possibilitou o contato com a organização interna e externa de um Estado (347-345). Casa-se com Pítias, sobrinha de Hermias. A sua permanência foi subitamente interrompida, quando os persas suspeitaram que Hermias estava a colaborar com os macedônios, decidindo crucificá-lo em Persépolis (345). Aristóteles foge, refugiando-se em Mitilene, na ilha de Lesbos, onde se dedica ao estudo da biologia.

Em 343 foi convidado pelo Rei Filipe para a corte de Macedônia assumindo por três anos o cargo de mentor do Príncipe **Alexandre**, então jovem de treze anos (futuro Alexandre – o Grande). Quando Alexandre subiu ao trono, em 335, Aristóteles, com 49 anos de idade, voltara a Atenas e fundou, perto do templo de Apolo Lício, a sua escola, denominada *O Liceu*. Lá os estudos concentravam-se sobre o que hoje poderíamos denominar "ciências naturais", ao contrário da Academia Platônica – sua grande rival – onde era dada grande importância à geometria. A metodologia de ensino se atinha ao costume de ministrar lições, em amena palestra, passeando nos caminhos do ginásio de Apolo. O Liceu era um verdadeiro centro de investigação, apoiado por Alexandre. Nele Aristóteles e os seus discípulos recolhiam informações acerca de tudo, organizando depois estes dados num sistema global.

Morto Alexandre em 323, desfez-se politicamente o grande império Alexandrino e despertaram-se em Atenas os desejos de independência, estourando uma reação nacional, chefiada por Demóstenes. Aristóteles, malvisto pelos atenienses, foi acusado de ateísmo. Preveniu ele a condenação, retirando-se voluntariamente para Eubéia, aonde faleceu, após enfermidade, no ano seguinte, no verão de 322. Tinha pouco mais de 60 anos de idade.

A respeito de Aristóteles, tratava-se de uma pessoa inteiramente recolhida na elaboração crítica do seu sistema filosófico, sem se deixar distrair por motivos práticos ou sentimentais, a qual temos naturalmente muito menos a revelar do que em torno de seu mestre Platão, em que, ao contrário de Aristóteles, os motivos políticos, éticos, estéticos e místicos tiveram grande influência. Devido ao diferente caráter dos dois filósofos, os reveses e eventualidades de suas vidas tornam-nas bem distintas, sendo mais uniforme e linear a de Aristóteles, variada e romanesca a de Platão. Aristóteles foi essencialmente um homem de cultura, de estudo, de pesquisas, de pensamento, que se foi isolando da vida prática, social e política, para se dedicar à investigação científica.

A atividade literária de Aristóteles foi vasta e intensa, como a sua cultura e seu gênio universal. O filósofo assimilou todos os conhecimentos anteriores e acrescentou-lhes o trabalho próprio, fruto de muita observação e de profundas meditações. Escreveu sobre todas as ciências, constituindo algumas desde os primeiros fundamentos, organizando outras em corpo coerente de doutrinas.

Os principais escritos de Aristóteles sobre lógica foram reunidos pelos seus continuadores após a sua morte, numa obra a que deram o nome de **Organun**, que se encontra dividido nas seguintes partes:

Categorias: Escritos sobre a teoria dos tipos, isto é, uma teoria na qual os objetos são classificados de acordo com o que se pode dizer significativamente acerca deles.

Tópicos: Escritos para orientar todos aqueles que tomam parte em competições públicas de dialética ou discussão.

Refutações dos Sofistas: Formas de argumentações ilógicas ou de falso raciocínio formuladas com o fim de induzir em um erro.

Interpretação: Escritos sobre os juízos.

Primeiros Analíticos: Escritos sobre o silogismo – argumento ou raciocínio formado de três proposições: a maior, a menor (premissas) e a conclusão.

Segundos Analíticos: Escritos sobre a demonstração.

Foram múltiplas as contribuições de Aristóteles para a criação e desenvolvimento da lógica como a conhecemos. Entre outras, devem-se-lhe as seguintes contribuições:

- A separação da validade formal do pensamento e do discurso da sua verdade material.
- A identificação dos conceitos básicos da lógica.
- A introdução de letras mudas para denotar os termos.

- A criação de termos fundamentais para analisar a lógica do discurso: "Válido", "Não Válido", "Contraditório", "Universal", "Particular".

A lógica de Aristóteles tinha um objetivo eminentemente metodológico. Tratava-se de mostrar o caminho correto para a investigação, o conhecimento e a demonstração científicas. O método científico que ele defendia, assentava nas seguintes fases:

1. Observação de fenômenos particulares;
2. Intuição dos princípios gerais (universais) a que os mesmos obedeciam;
3. Dedução a partir deles das causas dos fenômenos particulares.

Aristóteles estava convencido que se estes princípios gerais fossem adequadamente formulados, e as suas conseqüências corretamente deduzidas, as explicações só poderiam ser verdadeiras.

Apesar dos enormes avanços que produziu, a lógica aristotélica tinha enormes limitações que se revelaram mais tarde, verdadeiros obstáculos para o avanço da ciência, como por exemplo:

- Assentava no uso da linguagem natural e, portanto, estava muitas vezes enredada em confusões sobre o sentido das palavras.
- Atribuiu uma enorme importância ao estudo dos 256 modos do silogismo e à consideração de enunciados que continham exatamente dois termos. Os seus continuadores acabaram por reduzir a lógica ao silogismo.

B) Lógica Medieval

Durante a Idade Média, em especial durante os séculos XIII a XV, em pleno florescimento da escolástica – filosofia que consiste no uso de formalismos e sutilezas de linguagem e num culto exagerado das autoridades intelectuais – foram realizados notáveis progressos na lógica aristotélica. A lógica tornou-se mais sistemática e progressiva. São de salientar as contribuições de Duns Escoto, Guilherme de Occam, Alberto da Saxônia e Raimundo Lúlio. Este último concebeu o projeto de mecanização da lógica dedutiva, idéia mais tarde desenvolvida por **Leibniz**. É neste período que o português Pedro Hispano escreve a "Summulae Logicals", o tratado de lógica mais difundido em toda a Europa até o século XVI.

A lógica durante a Idade Média era entendida como a "ciência de todas as ciências". Competia-lhe validar os atos da razão humana na procura da Verdade. De acordo com o pensamento corrente no tempo, o saber científico tinha que obedecer à lógica formal. A partir de um conjunto de princípios universais admitidos como verdadeiros, por um processo dedutivo, procurava-se encontrar a explicação para todos os fenômenos particulares. Embora este método fosse igualmente divulgado por Aristóteles, na Idade Média deu-se uma enorme importância à dedução, desvalorizando-se por completo a indução na descoberta científica. Este fato teve como conseqüência ter-se cortado com a base empírica (experimental) da investigação.

Porém, a partir do século XVI a lógica segue por outros caminhos e as idéias aristotélicas passam por novos questionamentos. Os métodos dedutivos que as mesmas preconizavam para a investigação científica começam a ser postos em causa, devido ao advento da ciência experimental. A partir do particular, os cientistas procuram agora atingir o universal, e não o contrário, como defendia a lógica aristotélica. Rompeu-se assim com os estudos seculares da lógica dedutiva e procurou-se fundamentar as regras do raciocínio indutivo. A lógica formal entra num período de descrédito, devido às criticas de filósofos como **Francis Bacon** (1561-1626) e **René Descartes** (1596-1650).

A principal obra de Francis Bacon – **Novo Organon** – indica desde logo, a sua intenção de substituir o Organon aristotélico. Tratava-se de criar um novo método de investigação científica – o método indutivo-experimental. A principal contribuição está no fato de ter valorizado o papel da indução. A investigação científica devidamente conduzida era uma ascensão gradual indutiva, desde as correlações de baixo grau de generalidade (particulares) até às de maior nível de generalidade (universais).

I. 2) Período Moderno: Séc XIX – Séc XX

A) Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) ocupa um lugar especial na história da lógica. Este filósofo procurou aplicar à lógica o modelo de cálculo algébrico da sua época. Este é concebido como um conjunto de operações dedutivas de natureza mecânica onde são utilizados símbolos técnicos. Era sua intenção submeter a estes cálculos algébricos a totalidade do conhecimento científico. Na sua obra **Dissertação da Arte Combinatória**, apresenta os princípios desta nova lógica:

- Criação de uma nova língua, com notação universal e artificial.
- Fazer o inventário das idéias simples e simbolizá-las de modo a obter um "alfabeto dos pensamentos" simples expressos em caracteres elementares.
- Produzir idéias compostas combinando estes caracteres elementares.
- Estabelecer técnicas de raciocínio automatizáveis, de modo a substituir o pensamento e a intuição, por um cálculo de signos.

O raciocínio torna-se, neste projeto de Leibniz, um cálculo suscetível de ser efetuado por uma máquina organizada para o efeito. Esta idéia irá inspirar até aos nossos dias não apenas o desenvolvimento da lógica, mas a criação de máquinas inteligentes.

B) A Criação da Lógica Matemática

Em meados do século XIX, opera-se na lógica uma verdadeira revolução. Diversos investigadores de formação matemática irão conceber, não apenas uma nova linguagem simbólica, mas também uma forma de transformar a lógica numa álgebra. Tendo sucesso em suas idéias, Leibniz conseguira fazer com que a lógica fosse vista como um cálculo, tal como a álgebra, e onde os enunciados seriam atemporais, à semelhança das proposições matemáticas.

É atribuído a **George Boole** (1815-1864) a criação da lógica matemática. Na sua obra **Mathematical Analysis of Logic**, publicada em 1847, a lógica foi tratada, pela primeira vez, de uma forma consistente como um cálculo de signos algébricos. Esta álgebra booleana será fundamental para o desenho dos circuitos nos computadores eletrônicos modernos. É ainda a base da teoria dos conjuntos. Outras das suas contribuições decisivas foi ter acabado com as restrições impostas à lógica desde Aristóteles, afirmando que existia uma infinidade de raciocínios válidos e uma infinidade de raciocínios não válidos.

No final do século XIX os estudos da lógica matemática deram passos gigantescos, no sentido da formalização dos conceitos e processos demonstrativos. Entre os matemáticos e filósofos que mais contribuíram para os avanços destacam-se Gottlob Frege, Peano, B. Russell, Alfred N. Witehead e David Hilbert. É nesta fase que são criados os seguintes sistemas lógicos: o cálculo proposicional e o cálculo de predicados.

Gottob Frege (1848-1925), cujas obras principais datam de 1879 e 1893, foi o primeiro a apresentar o cálculo proposicional na sua forma moderna. Introduziu a função proposicional, o uso de quantificadores e a formação de regras de inferência primitivas. Procurou criar todo um sistema capaz de transformar em raciocínios dedutivos todas as demonstrações matemáticas. Para isso todas as demonstrações foram traduzidas num vocabulário fixo – um certo conjunto de modos de tradução. Nesta notação, a construção de cada frase, o seu significado, e o modo como no raciocínio se deduziam os novos passos a partir dos anteriores, tudo devia de ser devidamente explicitado.

A lógica matemática caracteriza-se por ter construído uma linguagem artificial, simbólica, para representar o pensamento de uma forma unívoca. Cada signo possui apenas um único significado. Esta linguagem possui as seguintes propriedades:

- Não exige qualquer tradução numa linguagem natural;
- A escrita é ideográfica (não fonética). As idéias são representadas por sinais;
- A forma gramatical é substituída pela forma lógica.

Giuseppe Peano (1858-1932) desenvolve o sistema de notação empregado pelos lógicos e matemáticos. Peano demonstrou igualmente que os enunciados matemáticos não são obtidos por intuição, mas sim deduzidos a partir de premissas.

Bertrand Russel (1872-1970) procura desenvolver o projeto do logicismo, isto é, a redução das matemáticas à lógica. Sua volumosa obra **Principia Mathematica** (1910-1913), escrita em colaboração com Whitehead, tornou-se a obra de referência da lógica matemática.

Após estas contribuições decisivas, os lógicos acabaram por se dividir quanto às relações entre a lógica e a matemática, tendo surgido três escolas:

- Os logiscistas, que defendiam que a lógica era um ramo da matemática.
- Os formalistas, que defendiam que ambas as ciências eram independentes, mas formalizadas ao mesmo tempo.
- Os intuicionistas, para os quais a lógica era um derivado da matemática porque era axiomatizada.

I. 3) Período Contemporâneo: Séc XX até hoje

A) Expansão dos Estudos da Lógica

Ao longo do século XX assistiu-se por um lado à generalização e diversificação dos estudos da lógica matemática, atingindo um elevado grau de formalização. A lógica possui atualmente um sistema completo de símbolos e regras que permite obter conclusões válidas. Este fato tornou-a particularmente adaptada a ser aplicada à concepção de máquinas inteligentes.

B) Aplicações da Lógica

A idéia de criar máquinas inteligentes não é nova. Desde o Renascimento que se tem procurado de forma sistemática conceber máquinas capazes de substituírem o homem em certas tarefas.

No século XX, os inventores de máquinas inteligentes tinham ao seu dispor uma ferramenta fundamental: uma lógica amplamente formalizada. As operações lógicas elementares foram rapidamente aplicadas nas novas máquinas. O primeiro computador totalmente automático, o IBM-Havard Mark 1, só se concretizou em 1944. Dois anos depois, Eckert e Mauchly apresentam o ENIAC, um computador totalmente eletrônico. Em 1950, entra em funcionamento o EDVAC, concebido entre outros, por Von Neumann. Este computador tinha duas características que se tornaram comuns aos futuros computadores:

os programas memorizados e o sistema numérico binário (criado pelo matemático e lógico George Boole). Os primeiros circuitos integrados práticos datam de 1959. Os microprocessadores foram inventados em 1969, no ano em que surgia a Internet. Começava então a revolução dos computadores.

C) Cibernética

A cibernética tem a sua origem nos anos trinta do século XX. A comunidade científica e filosófica debatia então com grande entusiasmo a questão das novas máquinas. Entre os que participavam dos debates destacavam-se A. Rosenbluth (especialista em fisiologia nervosa) e Norbert Wiener (matemático que se dedicava à construção de máquinas eletrônicas). Este último estava convencido que os sistemas de comunicação dos animais eram semelhantes aos de uma máquina. Wiener teve então a ideia de criar uma ciência interdisciplinar para o estudo dos sistemas de controle e comunicação nos animais e nas máquinas (como se organizam, regulam, reproduzem, evoluem e aprendem). Um dos ramos mais importantes desta ciência tem sido a robótica – estudo e construção de máquinas inteligentes.

D) Informática

O desenvolvimento dos computadores conduziu à criação de uma nova ciência aplicada, a informática. Esta ciência dedica-se ao estudo do tratamento automático da informação, que é fornecida a uma máquina a partir do meio exterior.

E) Inteligência Artificial

O desenvolvimento dos computadores acabou por impulsionar o aparecimento de uma nova ciência nos anos cinqüenta, a inteligência artificial. Esta ciência aplicada dedica-se ao estudo da construção de máquinas capazes de simularem atividades mentais, tais como a aprendizagem por experiência, resolução de problemas, tomada de decisões, reconhecimento de formas e compreensão da linguagem. As linhas de investigação são essencialmente três: simulação das funções superiores da inteligência; modelização das funções cerebrais, explorando dados da anatomia, fisiologia ou até da biologia molecular; reprodução da arquitetura neuronal de um cérebro humano, de forma a produzir uma máquina com condutas inteligentes.

CAPÍTULO II
TÓPICOS TEÓRICOS EM LÓGICA

II. 1) A Lógica Simbólica

A lógica simbólica, logística ou lógica matemática é um prolongamento da lógica clássica. Como tal, é também uma lógica formal, isto é, ocupa-se da análise das frases ou das proposições e das provas, atentando na forma, por abstração do conteúdo. Recorre extensivamente a um simbolismo de caráter matemático, a fim de eliminar as ambigüidades e tornar a sua exposição tão rigorosa quanto possível.

Comecemos este capítulo definindo o termo "proposição" enunciado anteriormente. Proposição simples é uma oração composta de sujeito e predicado e passível de julgamento – verdadeira ou falsa. Podemos considerar o discurso, em geral, composto de proposições como, por exemplo:

"Amanhã é o meu primeiro dia de férias e vou à praia".

"Alguns quadriláteros são losangos".

"Todos os portugueses são europeus".

Na medida em que a proposição, no sentido aqui definido, possui um valor de verdade, quer dizer, ou é verdadeira, ou é falsa, torna-se necessário distinguir entre o sentido gramatical e o sentido lógico do termo: assim, as proposições interrogativas e as imperativas não são proposições ou enunciados lógicos, pois não são passíveis da atribuição de um valor de verdade. Veja os exemplos:

"Qual o significado da Análise Combinatória?".

"O banquete está pronto?".

"Ligue a lâmpada!".

"Faça a prova!”.

A) Estrutura lógica

Muitas vezes não lidamos com proposições simples, mas com proposições compostas, inseridas numa determinada estrutura.

Definimos uma proposição composta como sendo aquela constituída de duas ou mais proposições simples. Assim, as duas proposições seguintes têm a mesma estrutura lógica:

“Todos os micróbios ou são animais ou são vegetais”.

“Todos os seres humanos ou são homens ou são mulheres”.

Se repararmos bem, nos daremos conta da existência de elementos comuns às duas proposições – "Todos", "ou… ou" –, que designaremos por expressões lógicas e que são os responsáveis pela sua estrutura lógica comum. Outras expressões lógicas possíveis serão:

- *Se… então* – "**Se** este animal tem escamas, **então** não é mamífero”.
- *E* – “O quadrado é losango **e** retângulo”.
- *Não* – "João **não** trabalha”.
- *Alguns* – "**Alguns** franceses são vaidosos”.
- *Um pelo menos* – "**Pelo menos um** português ganhou o prêmio Nobel”.

Distinguiremos dois tipos de expressões lógicas, que nos permitirão dividir o estudo da lógica simbólica em duas partes principais:

- Os **conectivos**, ou **funções de verdade**: "e", "ou", "não", "se… então", "se e somente se", etc., que permitem ligar entre si várias proposições, obtendo proposições compostas cuja verdade ou falsidade é dependente somente da verdade ou falsidade das proposições iniciais, e da natureza dos conectivos envolvidos. São objetos do **cálculo proposicional**. Neste, abstraímos totalmente o conteúdo, e analisamos apenas como a ligação entre as proposições influencia o valor de verdade.

- Os **quantificadores**: "alguns", "um pelo menos", "todos", etc., que ocorrem no interior das proposições, influenciando o seu valor de verdade, e que nos obrigarão, ao contrário das conectivas, a analisar algo do conteúdo das proposições simples. São objetos do **cálculo de predicados**.

II. 2) O cálculo proposicional: conectivas

O cálculo proposicional constitui o fundamento da lógica simbólica ou lógica matemática contemporânea. Definimos as conectivas como aquelas expressões lógicas que permitem ligar entre si várias proposições simples, obtendo proposições complexas cuja verdade ou falsidade dependerá da verdade ou falsidade das proposições iniciais e da natureza das conectivas envolvidas. Teremos em estudo as seguintes conectivas:

- A conjunção
- A negação
- A disjunção
- A condicional
- A bicondicional

A) A conjunção ($\wedge$)

A **conjunção** é uma composição entre duas ou mais proposições que é indicada geralmente, na linguagem natural, pelo termo "e", como nos exemplos que seguem:

João trabalha e estuda.

Manuel viaja, Abel está doente e Maria está na escola.

A proposição composta resultante será verdadeira se todos os componentes forem verdadeiros; será falsa se pelo menos um dos componentes for falso.

É de notar que, na linguagem corrente, nem sempre o termo "e" indica uma conjunção lógica: na Bíblia, por exemplo, usam-se muito frases do tipo "E viu Deus que era bom", onde o "e" tem uma função meramente retórica e não conjuntiva. Por outro lado, a existência de uma conjunção lógica não implica necessariamente a presença da conjunção gramatical. É o caso do segundo exemplo acima dado.

Problemas deste gênero obrigaram os lógicos a desenvolver um simbolismo específico, dando a cada signo um significado bem definido, a fim de evitar as ambigüidades e a falta de rigor da linguagem natural. A conjunção lógica, tal como foi aqui definida, é designada pelo símbolo "$\wedge$". Desta forma, os exemplos dados deveriam ser apresentados, para melhor compreendermos a sua estrutura lógica, da seguinte forma:

João trabalha $\wedge$ João estuda.

Manuel viaja $\wedge$ Abel está doente $\wedge$ Maria está na escola.

Repare que a ordem das proposições numa conjunção é indiferente. Tanto faz dizer "João trabalha e estuda", ou "João estuda e trabalha". Podemos ainda, por comodidade de expressão, ler "$\wedge$" como "e". Assim, a primeira proposição pode ser lida do seguinte modo: "João trabalha e João estuda".

B) A negação (~)

A negação é considerada uma conectiva, embora ao contrário das outras ela se aplique apenas a uma proposição, seja ela simples ou composta. Podemos defini-la como a operação lógica que consiste em fazer de uma proposição verdadeira uma proposição falsa e vice-versa. Designa-se pelo símbolo "~", que se pode ler "é falso que", ou "não é verdade que". Alguns exemplos:

~ Luís de Camões escreveu Os Lusíadas.

~ (João trabalha $\wedge$ João estuda) **(1)**

Ao aplicar a negação a uma proposição composta devemos primeiro inseri-la entre parêntesis. A razão é simples: tomando o último exemplo dado, se eliminássemos os parêntesis ficávamos com:

~ João trabalha ∧ João estuda **(2)**

Esta é a conjunção de "~ João trabalha" com "João estuda", e não a negação de "João trabalha ∧ João estuda". Isto se vê melhor traduzindo as duas expressões para a linguagem vulgar:

A proposição **(1)** é equivalente a "Não é verdade que João trabalhe e estude", enquanto que **(2)** quer dizer "João não trabalha, mas estuda".

A proposição **(1)** é verdadeira se qualquer uma das proposições simples for falsa e **(2)** só é verdadeira se "João trabalha" for falsa e "João estuda" verdadeira.

C) A disjunção (∨)

Esta operação lógica liga duas ou mais proposições de tal modo que a proposição resultante é verdadeira se e só se pelo menos uma das componentes é verdadeira. Exemplos:

João trabalha ∨ João estuda **(3)**

O condutor estava embriagado ∨ o freio falhou.

Em português corrente estas proposições poderiam ser lidas assim: "João trabalha ou estuda"; "Ou o condutor estava embriagado, ou o freio falhou (ou as duas coisas)".

Se pensarmos na forma como foi definida a disjunção e atentarmos no primeiro exemplo dado, veremos que ele é equivalente a:

~ (~ João trabalha ∧ ~ João estuda) **(4)**

Tanto **(3)** como **(4)** só são falsas quando as duas proposições componentes "João trabalha" e "João estuda" são ambas falsas. Podemos assim definir a disjunção em função da conjunção, e o contrário também é possível. Em termos formais, portanto, uma delas torna-se desnecessária; no entanto, por uma questão de comodidade, costuma-se usar as duas. O mesmo acontece com as outras conectivas de que falaremos a seguir. Todas elas podem ser expressas em termos de conjunções e/ou de disjunções.

<u>Obs: A disjunção exclusiva</u>

Um exemplo especial é constituído pela **disjunção exclusiva**, que é verdadeira apenas se um dos componentes é verdadeiro, mas não os outros: "O barco partirá, a não ser que haja um temporal".Quer dizer: ou o barco partirá, ou haverá um temporal, mas não as duas coisas. Isto pode muito bem ser expresso em termos das operações já definidas:

(O barco partirá $\vee$ Haverá um temporal) $\wedge$ ~ (O barco partirá $\wedge$ Haverá um temporal).

D) A condicional e a bicondicional (→ , ↔)

- <u>A condicional não é uma operação comutativa.</u>

A primeira destas conectivas, a **condicional** – o símbolo "⇒" costuma ler-se "se... então" –, merece um relevo especial, dada a sua presença generalizada no discurso demonstrativo e argumentativo. Inicialmente há uma particularidade que a distingue da conjunção e da disjunção: a ordem dos componentes não é arbitrária, ou seja, em termos mais técnicos, <u>não é uma operação comutativa</u>. Enquanto que "João trabalha $\vee$ João estuda" é equivalente a "João estuda $\vee$ João trabalha", as condicionais seguintes não são equivalentes:

Este metal é ouro → Este metal brilha **(5)**

Este metal brilha → Este metal é ouro

Como facilmente se verifica se fizermos as respectivas traduções para português corrente:

Se este metal é ouro, (então) brilha.

Se este metal brilha, (então) é ouro.

A primeira proposição de uma condicional, ou seja, aquela que é precedida pela partícula "se", recebe a designação de antecedente, condição ou hipótese; a outra proposição é o conseqüente, o condicionado ou a tese.

- Condição necessária e condição suficiente

Freqüentemente, encontramos dois termos que estão intimamente associados a esta operação lógica: são eles os conceitos de condição necessária e condição suficiente. No nosso exemplo **(5)**, podemos dizer que "Ser ouro é condição suficiente para brilhar" e "brilhar é condição necessária para ser ouro". Ou seja, para ser ouro, um metal tem pelo menos que brilhar: é uma condição necessária; por outro lado, basta (é suficiente), sabermos que um metal é ouro para sabermos também que brilha. Sintetizando, em termos mais técnicos, o antecedente é condição suficiente do conseqüente, e o conseqüente é condição necessária do antecedente.

- Uma condicional só é falsa quando o antecedente é verdadeiro e o conseqüente falso

Posto isto, podemos definir a condicional como a operação lógica que liga dois enunciados, o antecedente e o conseqüente, de tal forma que a ligação só será falsa quando o antecedente for verdadeiro e o conseqüente falso.

É o que acontece com **(5)**: dizer que o metal é ouro e não brilha, é falso; que é ouro e brilha, é verdadeiro; por outro lado, se o metal não for ouro, tanto faz que brilhe ou não, pois neste caso a verdade da condicional **(1)** não é posta em causa.

Apesar das suas particularidades, a condicional pode ser expressa também em termos de conjunção, ou disjunção. Como exemplo, **(5)** é equivalente a:

~ (Este metal é ouro ∧ ~ Este metal brilha) **(6)** ou seja, "Não é verdade que este metal seja ouro e não brilhe", falsa apenas, de acordo com as definições de conjunção e de negação, quando "Este metal é ouro" é verdadeira e "Este metal brilha" falsa.

A **bicondicional** é, como o nome e o símbolo indicam, uma forma de indicar abreviadamente a existência de uma condicional recíproca entre duas proposições, ou seja, a composição de duas proposições que são simultaneamente conseqüente e antecedente uma da outra, e, portanto, simultaneamente condição necessária e suficiente uma da outra. Exemplo:

O Porto está a norte de Lisboa ↔ Lisboa está a sul do Porto

Ou seja,

"O Porto está a norte de Lisboa se e somente se Lisboa está a sul do Porto".

Esta composição é logicamente equivalente a:

(O Porto está a norte de Lisboa ↔ Lisboa está a sul do Porto) ∧ (Lisboa está a sul do Porto → O Porto está a norte de Lisboa)

A qual, por sua vez, é equivalente a:

~ (O Porto está a norte de Lisboa ∧ ~ Lisboa está a sul do Porto) ∧ ~ (Lisboa está a sul do Porto ∧ ~ O Porto está a norte de Lisboa)

Poderemos verificar, de acordo com as definições já dadas, que esta última proposição composta só é verdadeira no caso das duas proposições simples serem ambas verdadeiras ou ambas falsas. Daí podermos definir a bicondicional como o operador que liga duas ou mais proposições de modo a que a proposição resultante seja verdadeira se e somente se as componentes têm o mesmo valor verdade, isto é, são todas falsas ou todas verdadeiras.

II. 3) O Cálculo de Predicados

A) Introdução

No início do estudo de proposições lógicas, consideramo-nas como se formassem um bloco indivisível, suscetível de receber um dos valores lógicos: verdadeiro ou falso. Porém, o conteúdo das proposições – certos elementos que as formam – são passíveis também de uma análise lógica, na medida em que irão influenciar o valor verdade das proposições. Consideremos, inicialmente, os seguintes exemplos:

O tecido é longo $\wedge$ O tecido é curto.

Algo é longo $\wedge$ Algo é curto.

Embora a estrutura lógica dos dois enunciados pareça ser semelhante, nitidamente a primeira conjunção é falsa, enquanto a segunda pode pelo menos ser verdadeira, dependendo da forma como substituirmos "algo" em cada proposição, ou seja, dos objetos que designamos com essa expressão. Se substituirmos "algo" por "O tecido", obteremos a primeira conjunção, que é falsa; mas podíamos pensar também em qualquer coisa como o seguinte:

A estrada é longa $\wedge$ O beco é curto

que resulta numa conjunção verdadeira, possivelmente.

B) Análise das proposições

Não é indiferente àquilo que existe <u>dentro</u> de uma proposição. Quais são, nesta ordem de idéias, os seus constituintes principais? Vejamos primeiro alguns exemplos:

Camões é o maior poeta português.

João gosta de chocolates.

A soma dos ângulos internos do triângulo vale 180 graus.

Numa primeira análise, podemos distinguir dois elementos principais: um argumento (ou sujeito), respectivamente "Camões", "João" e "A soma dos ângulos internos do triângulo"; e um predicado (ou verbo), respectivamente "é o maior poeta português", "gosta de chocolates" e "vale 180 graus". Tendo em conta estes novos dados, a forma lógica de cada uma das proposições anteriores poderia ser simbolizada da seguinte maneira:

Pa,

em que a letra "P" representa o predicado e a letra "a" o argumento.

Eis a razão porque esta parte da lógica recebe a designação de cálculo de predicados, embora fosse talvez mais correto chamar-lhe cálculo intraproposicional, pois o que está em causa aqui realmente é uma série de elementos que existem no interior das proposições.

C) Função proposicional

A um mesmo predicado podem corresponder diversos argumentos. Considere, por exemplo, o predicado "é quadrilátero". Podemos pensar em qualquer coisa deste gênero:

O x é quadrilátero,

a que daremos o nome de função proposicional ou condição, e que poderemos simbolizar na mesma por "Px". Não se trata de uma proposição, mas de uma espécie de forma para construir proposições. De cada vez que substituímos x pelo nome de um polígono obtemos uma proposição verdadeira ou falsa. Por exemplo, se substituirmos x uma vez por "losango", e outra vez por "triângulo" obtemos as seguintes proposições, das quais a primeira é verdadeira e a segunda falsa:

O losango é quadrilátero.

O triângulo é quadrilátero.

Por outro lado, substituindo x por "pato", obteríamos:

O pato é quadrilátero.

O que manifestamente não tem sentido, não podendo ser considerado nem verdadeiro nem falso. Assume, portanto, importância fundamental a <u>classe dos argumentos</u>. Ou seja, uma determinada função proposicional é válida ou tem sentido para uma determinada classe ou conjunto de argumentos, que tem de ser considerada em conjunto com o predicado em causa.

II. 4) Quantificadores

Além dos argumentos e predicados, desempenham papel importante na verdade ou falsidade das proposições os <u>quantificadores</u>. É possível, através deles, indicar se estão em causa todos, pelo menos um, ou nenhum dos elementos da classe dos argumentos, e avaliar a forma como este fato influi no cálculo lógico. Existem duas espécies principais de quantificadores: <u>existencial e universal.</u>

A) Quantificador existencial (∃)

Algumas funções são bijetoras.
Existem elefantes na Ásia.
Alguém foi a Júpiter.

Em todas estas proposições está em causa o mesmo tipo de quantificador. Para compreender a sua natureza, reformulemo-las, de modo a colocar em evidência uma estrutura comum.

Existe pelo menos uma função que é bijetora.
Existe pelo menos um elefante na Ásia.
Existe pelo menos um ser humano que foi a Júpiter.

Substituamos a expressão "existe pelo menos um" pelo símbolo "∃", indicador do quantificador existencial. Uma outra reformulação seria possível:

∃x, tal que x é função e bijetora.
∃x, tal que x é elefante e asiático.
∃x, tal que x é humano e foi a Júpiter.

Finalmente, de uma forma plenamente simbólica, poderíamos reformular uma última vez todas as proposições anteriores da seguinte forma:

∃x: Px.
∃x: Qx.
∃x: Rx.

Que se poderia ler da seguinte forma: existe pelo menos um elemento pertencente a uma determinada classe ou conjunto que verifica a função proposicional dada, sendo "Px" a condição "x é função e bijetora", "Qx", "x é elefante e asiático" e "Rx" a condição "x é humano e foi a Júpiter".

Repare que, ao aplicarmos, um quantificador existencial a uma condição, transformamo-la numa proposição, verdadeira se a condição é possível, falsa se a condição é impossível. Este é o caso do último exemplo apresentado, visto que até agora ninguém foi a Júpiter ou a qualquer outro planeta do sistema solar.

B) Quantificador universal (∀)

Considerando uma determinada função proposicional, podemos aplicar-lhe, além do quantificador existencial, o quantificador universal, que se indica pelo sinal "∀". Aplicando-o a cada uma das condições definidas anteriormente, teríamos as seguintes proposições:

∀x: Px.
∀x: Qx.
∀x: Rx.

Ou seja:

Todas as funções são bijetoras,

Todos os elefantes são asiáticos,

Todos os seres humanos foram a Júpiter,

Que são todas proposições falsas. Ou seja, <u>o quantificador universal apenas transforma uma condição numa proposição verdadeira quando essa condição é também universal</u>, ou seja, aplica-se a todos os elementos da sua classe. Sejam, por exemplo, as seguintes condições:

Px: x é mortal (definida para a classe dos homens).

Qx: x é congruente (definida para a classe dos ângulos opostos pelo vértice).

Aplicando o quantificador universal teremos:

$\forall x$: Px;

$\forall x$: Qx.

Ou seja:

Todos os homens são mortais.

Todos os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Que são proposições verdadeiras.

C) Quantificadores e Negação

A negação de uma proposição da qual conste um quantificador exige algumas precauções, sendo necessário ter em atenção a natureza do quantificador e do predicado. Assim, não é a mesma coisa negar o quantificador e negar o predicado. Em relação ao quantificador universal temos o seguinte:

$\forall x$: ~Px.

Estamos negando a condição, querendo dizer que todos os elementos de uma determinada classe não verificam a condição dada. Por exemplo, "Todos os triângulos não são retângulos", que é a mesma coisa que dizer "Nenhum triângulo é retângulo".

$\sim\forall$ x: Px.

Agora negamos o quantificador e, por conseguinte, indicamos que não se trata realmente de um quantificador universal. Exemplo: "Nem todos os triângulos são retângulos", que é o mesmo que "Alguns triângulos não são retângulos".

Podemos derivar a segunda proposição da primeira, mas não vale a recíproca, pois a primeira tem um alcance mais geral:

$\forall$x: ~Px $\rightarrow$ $\sim\forall$ x: Px: "Todo o x é não P" implica "Nem todo o x é P".

Com o quantificador existencial também acontece algo análogo:

$\exists$x: ~Px.

Como exemplo, "Existe pelo menos uma seqüência que não é progressão aritmética" (Px: x é progressão aritmética), ou "Nem todas as seqüências são progressões aritméticas".

$\sim\exists$ x: Px.

"Nenhuma seqüência é progressão aritmética", que também se pode dizer "Todas as seqüências não são progressões aritméticas".

Neste caso é a segunda proposição que tem um alcance mais geral, e que permite, portanto, derivar a primeira.

Finalmente, tendo em conta os exemplos dados, podemos estabelecer duas regras que nos permitem transformar um quantificador no outro:

- Negar a função proposicional ou condição numa proposição universal é equivalente em dizer que não existe nenhum argumento que a verifique. Por exemplo:

$\forall$x: ~Px $\leftrightarrow$ ~$\exists$ x: Px. "Todos os homens não são imortais" equivale a "Nenhum homem é imortal".

Obs: Entendemos por "proposição universal" como sendo a proposição que contém o quantificador universal.

- Negar a função proposicional ou condição numa proposição existencial é a mesma coisa que dizer que nem todos os argumentos a verificam. Assim, negar a condição numa proposição existencial equivale a negar o quantificador na proposição universal equivalente:

$\exists$x: ~Px $\leftrightarrow$ ~$\forall$ x: Px. "Existe um triângulo que não é quadrado" é equivalente a "Nem todos os triângulos são quadrados".

Obs: Entendemos por "proposição existencial" como sendo a proposição que contém o quantificador existencial.

O conhecimento destas regras é importante porque permite deslocar a negação do quantificador para a condição, permitindo tratar a fórmula resultante de acordo com as regras do cálculo proposicional. Por exemplo, suponhamos que temos a seguinte expressão:

~$\exists$ x: Px $\wedge$~Q x.

Usando a primeira regra, podemos dizer que a fórmula anterior é equivalente à seguinte:

$\forall$x: ~(Px $\wedge$~Q x),

a qual por sua vez equivale a:

$\forall$x: Px $\rightarrow$ Q x

CAPÍTULO III
TEOREMAS E QUANTIFICADORES

A fim de ilustrar a teoria exposta no capítulo anterior, dedicaremos este capítulo à aplicação dos quantificadores no contexto das demonstrações de alguns teoremas matemáticos. Na escolha dos teoremas, procuramos ser o mais abrangentes possível, mostrando assim como o assunto estudado é utilizado não apenas em uma área específica da Matemática, mas aplicado tanto na Geometria, quanto na Álgebra, ou na Análise Real, entre outros.

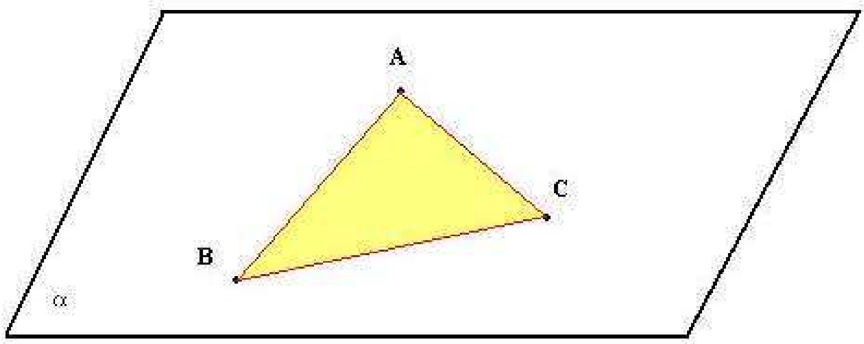
Demonstraremos inicialmente as três maneiras de se determinar um plano no espaço tridimensional, seguindo caminho pela demonstração da inscrição de todo polígono regular em uma circunferência. A seguir, entraremos na Álgebra, com a demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética, encerrando o capítulo provando que toda seqüência limitada de números reais possui uma subseqüência convergente – resultado fundamental da Análise.

III. 1) Geometria Espacial – Determinação do Plano

A determinação do plano no espaço lida com um axioma e com três teoremas dependentes diretamente deste primeiro axioma. Devido a isto, introduziremos inicialmente o...

Axioma da Determinação do Plano

Três pontos não colineares determinam um único plano.



Notemos que o axioma já determina a existência e a unicidade do plano utilizando apenas três pontos quaisquer – definidos na hipótese.

Com base neste axioma, demonstraremos os demais teoremas valendo-nos dos quantificadores e das noções iniciais de Geometria Espacial.

A) Teorema 01

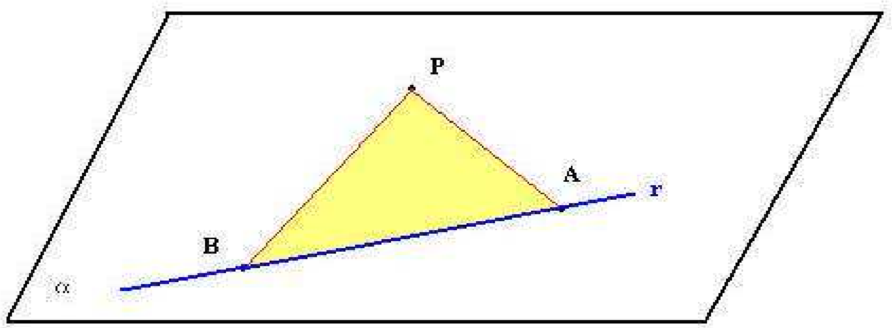
Se uma reta r e um ponto P são tais que o ponto P não pertence à reta r, então eles determinam um único plano α que os contêm.

Hipótese: $P \notin r$

Tese: $\exists| \, \alpha \, : \, P \in \alpha$ e $r \subset \alpha$

Demonstração

1ª Parte – Existência



Sejam A e B dois pontos distintos em r.

Como P não pertence à reta r, por hipótese, A, B e P são não colineares e distintos.

A partir do Axioma da Determinação – "Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles" – α é o plano que contém os pontos A, B e P.

Logo, existe pelo menos o plano α construído por r e P. **(1)**

2ª *Parte – Unicidade*

Suponhamos que existam dois planos α e α' distintos entre si, passando pela reta r e pelo ponto P.

Desta forma, α é determinado pela reta r e pelo ponto P. Sejam A e B dois pontos distintos de r, então α é determinado pelos pontos A, B e P.

Analogamente, temos que α' é também determinado pelos pontos A, B e P. Mas, de acordo com o Axioma da Determinação do Plano, existe apenas um único plano formado por três pontos distintos. Assim, $\alpha = \alpha'$.

Portanto, existe um único plano determinado por r e $P \notin r$. **(2)**

3ª Parte – Conclusão

De **(1)** e **(2)** vemos que existe um único plano α determinado por uma reta r e um ponto $P \notin r$.

B) Teorema 02

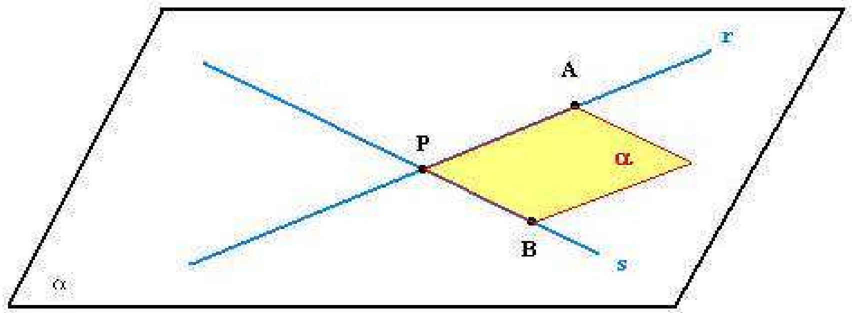
Se duas retas são concorrentes, então elas determinam um único plano que as contém.

Hipótese: $r \cap s = \{P\}$

Tese: $\exists| \; \alpha \; : \; r \subset \alpha$ e $: \; s \subset \alpha$

Demonstração

1ª Parte – Existência



Sejam A e B dois pontos distintos de P e tomados, respectivamente, em r e s.

Sendo A, B e P não colineares e distintos entre si, de acordo com o Axioma da Determinação, existe um plano α determinado por estes três pontos.

Logo, existe, pelo menos, o plano α que contém r e s. **(1)**

2ª Parte – Existência

Suponhamos que existam dois planos α e α' distintos entre si e contendo as retas r e s.

Desta forma, valendo-se da existência provada acima, o plano α é determinado pelas retas r e s. Sejam A um ponto de r, B um ponto de s, P o ponto de intersecção destas retas e A, B e P distintos entre si. Pelo Axioma da Determinação do Plano, existe um único α determinado por A, B e P.

Analogamente, determinamos α'. Porém, se α e α' são ambos determinados por A, B e P, temos que $\alpha = \alpha'$, pois α (ou α') deve ser único.

Logo, um único plano determinado por r e s concorrentes. **(2)**

3ª Parte – Conclusão

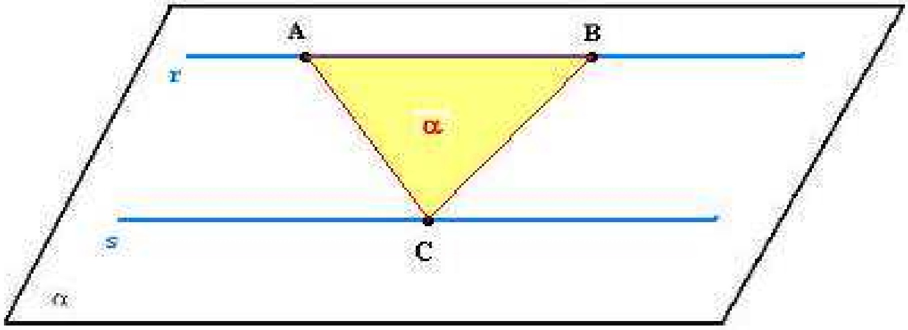
De **(1)** e **(2)** vemos que existe um único plano α determinado por duas retas concorrentes r e s.

03) Teorema 03

Se duas retas são paralelas e distintas, então elas determinam um único plano que as contém.

Hipótese: $r \parallel s$, $r \neq s$

Tese: $\exists| \, \alpha \; : \; r \subset \alpha \; \text{e} \; s \subset \alpha$



Demonstração

1ª Parte – Existência

Sejam A e B pontos distintos da reta r e C um ponto de s. Como r e s são paralelas e distintas, não admitem pontos em comum, logo A, B e C são todos distintos e não colineares.

Do Axioma da Determinação, definimos α a partir de A, B e C.

Logo, existe pelo menos, o plano α que passa por r e s. **(1)**

2ª Parte – Unicidade

Vamos supor que por r e s passam dois planos α e α'. Provemos que eles coincidem.

Como vimos anteriormente, na existência, tomando-se dois pontos distintos em r e um ponto em s, definimos o plano α determinado por A, B e C distintos entre si.

Da mesma forma, definimos o plano α'. Porém, como três pontos não colineares determinam um único plano, α = α'.

Logo, existe um único plano determinado por r e s paralelas e distintas. **(2)**

3ª Parte – Conclusão

De **(1)** e **(2)** vemos que existe um plano α determinado por duas retas paralelas distintas r e s, e ele é único.

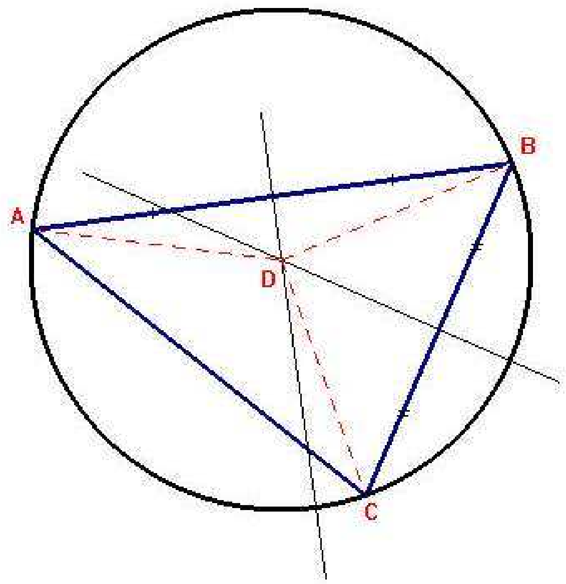
III. 2) Geometria Plana – Inscrição de polígonos

Todo polígono regular é inscritível em uma circunferência

Demonstração

Demonstraremos este teorema partindo do seguinte fato:

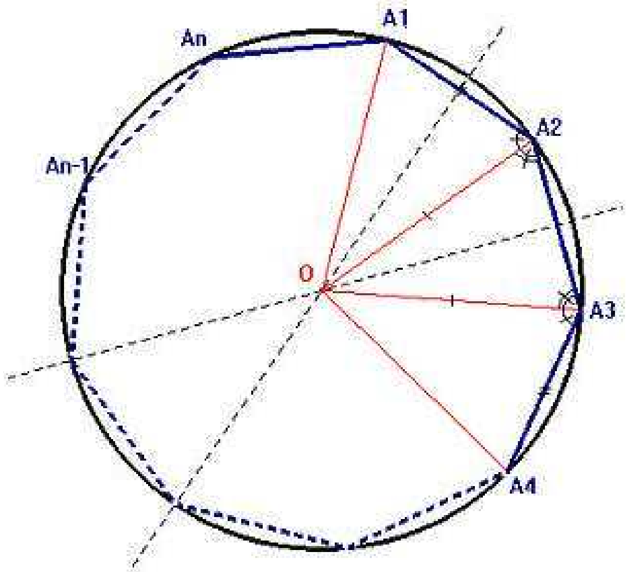
“Existe uma única circunferência que passa por em três pontos distintos quaisquer do plano”



Sejam A, B e C pontos do plano, distintos entre si e vértices do triângulo ABC. Tomando a intersecção da mediatriz do lado AB com a mediatriz do lado BC, determinamos um único ponto comum: D.

Assim, D é eqüidistante a A e a B e eqüidistante a B e a C. Por transitividade, D é eqüidistante a A e a C. Podemos, portanto, construir a circunferência de centro D e raio AD, a qual existe, é única e incidirá os outros dois pontos B e C.

Analisemos agora o teorema em questão.



Seja $A_1A_2A_3A_4A_5$ ... $A_{n-1}A_n$ o polígono regular. A partir do que provamos anteriormente, existe uma única circunferência que passa por três pontos do plano. A partir dos vértices A_1, A_2 e A_3 do polígono regular, tracemos a circunferência λ de centro O. Provemos que λ incide nos demais vértices A_4, A_5 ... $A_{n-1}A_n$ do polígono.

Consideremos os triângulos OA_2A_1 e OA_3A_4. $A_1A_2 \equiv A_3A_4$, pois ambos são lados do polígono regular, $OA_2 \equiv OA_3$, pois ambos segmentos são equivalentes ao raio da circunferência circunscrita e, considerando o triângulo isósceles OA_2A_3 e, ainda, que os ângulos $A_1\hat{A}_2A_3$ e $A_2\hat{A}_3A_4$ do polígono são congruentes, por diferença de ângulos concluímos que $OA_2A_1 \equiv OA_3A_4$.

Assim, os triângulos OA_2A_1 e OA_3A_4 são congruentes pelo caso L.A.L., logo $OA_1 \equiv OA_4$ e assim, o vértice A_4 do polígono incide na circunferência λ. Analogamente, os demais vértices incidem em λ. Da unicidade da circunferência que passa por A_1, A_2 e A_3 temos a unicidade de λ por A_1, A_2, A_3, A_4 ... A_{n-1} e A_n.

III. 3) Álgebra – Teorema Fundamental da Aritmética

Para todo número natural $a > 1$ existem números primos $p_1, p_2, \ldots, p_r$ (r   1) de forma que:

A) $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$;

B) Além disso, se $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$ são duas decomposições de a em fatores primos então $r = s$ e, usando uma notação conveniente, $p_i = q_i$, para $i = 1, 2, \ldots, r$.

Demonstraremos inicialmente a existência da decomposição e, em seguida, a unicidade.

Demonstração

1ª Parte – Existência

Hipótese: $a \in \mathbb{N}$ e $a > 1$

Tese: $\exists\ p_1, p_2, \ldots, p_r\ (r \in \mathbb{N})\ |\ a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$

A fim de demonstrar esta parte, recordemos o Segundo Princípio de Indução:

Segundo Princípio de Indução

Seja a um elemento de $\mathbb{N}$ e suponhamos que a cada natural n   a esteja associada uma afirmação $P_{(n)}$. Admitamos que seja possível provar as duas condições seguintes:

I) $P_{(a)}$ é verdadeira;

II) Para todo $r > a$, se $P_{(k)}$ é verdadeira sempre que $a \quad k < r$, então $P_{(r)}$ também é verdadeira.

Então $P_{(n)}$ é verdadeira para todo $n \quad a$.

Faremos a indução sobre a utilizando o 2º Princípio.

Se $a = 2$, como 2 é primo, existe um número primo $p_1 = 2$ tal que $a = p_1$ e a primeira parte da indução está feita.

Suponhamos agora $a > 2$ e que o teorema seja válido em sua primeira parte para todo b tal que $2 \quad b \quad a$ (hipótese de indução). Assi m, para todo natural b , $2 \quad b < a$, existem primos $p_1, p_2, \ldots, p_s$ $(s \quad 1)$ de forma que:

$$b = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_s$$

Devemos ter em mente que para $a > b$, como a é natural, a admite um divisor primo p tal que:

$$a = p \cdot a_1 \qquad (a_1 \in \mathbb{N},\ a_1 < a)$$

Se $a_1 = 1$ ou a_1 é primo, provamos que a é um produto de números primos, conforme queríamos demonstrar.

Caso contrário, como $2 \quad a_1 \quad a$, a hipótese de indução garante que há s primos $p_1, p_2, \ldots p_s$ $(s \quad 1)$ de modo que:

$$a_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_s$$

portanto,

$$a = p \cdot a_1 \Rightarrow a = p \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_s$$

e reenumerando os primos, temos,

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_r$$

2ª Parte – Unicidade

Hipótese: $a \in \mathbb{N}$; $a > 1$; $r , s \quad 1$

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$$

Tese: $r = s$

Usando uma notação conveniente, $p_i = q_i$, para $i = 1, 2, \ldots , r$.

Recordemos agora o Primeiro Princípio de Indução antes da demonstração completa.

Primeiro Princípio de Indução

Seja a um elemento de $\mathbb{N}$ e suponhamos que a cada natural $n \quad a$ esteja associada uma afirmação $P_{(n)}$. Admitamos que seja possível provar o seguinte:

I) $P_{(a)}$ é verdadeira;

II) Para todo $r \quad a$, se $P_{(r)}$ é verdadeira então $P_{(r+1)}$ também é verdadeira.

Desta forma, $P_{(n)}$ é verdadeira para todo $n \quad a$.

Valendo-nos do primeiro princípio de indução sobre a quantidade r de primos na decomposição, demonstraremos a unicidade.

Se $r = 1$ temos:

$$a = p_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s \qquad \textbf{(1)}$$

Mas p_1 é primo e $p_1 \mid q_1 , q_2 , \ldots , q_s$; logo, p_1 divide pelo menos um q_j. Assim, como p_1 e q_j são primos, devemos ter $\mathbf{p_1 = q_j}$. **(2)**

Aplicando **(2)** em **(1)**, vemos que:

$$a = p_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots q_{j-1} \cdot \mathbf{q_j} \cdot q_{j+1} \cdot \ldots \cdot q_s$$

$$p_1 = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots q_{j-1} \cdot \mathbf{p_1} \cdot q_{j+1} \cdot \ldots \cdot q_s$$

$$1 = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots q_{j-1} \cdot q_{j+1} \cdot \ldots \cdot q_s$$

Como $q_1 , q_2 , \ldots , q_{j-1} , q_{j+1} ,, \ldots , q_s$ são primos, seu produto não pode resultar 1, uma vez que todos são diferentes de 1. Assim, s = 1 e, usando uma notação conveniente, $p_1 = q_1$.

Suponhamos agora que s > 1 e que seja válido afirmar a segunda parte do teorema para s-1: "Se $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{r-1} = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_{s-1}$ são duas decomposições de a em fatores primos então r - 1 = s – 1 e, usando uma notação conveniente, $p_i = q_i$, para i = 1, 2, ... , r." (Hipótese de Indução).

De $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$ resulta que p_1 é divisor do produto $q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \ldots \cdot q_s$, logo, p_1 é divisor de um dos fatores q_j ($j \in \mathbb{N}$).

Sem perda de generalidade, suponha que p_1 seja divisor de q_1, logo, **$p_1 = q_1$, pois** p_1 e q_1 são números primos. **(3)**

Então, por **(3)** e pela hipótese:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = \mathbf{q_1} \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$$

$$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = \mathbf{p_1} \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$$

$$p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = q_2 \cdot \ldots \cdot q_s$$

O número natural à esquerda da igualdade possui r – 1 primos em sua decomposição, isto é, satisfaz a Hipótese de Indução. Logo, r – 1 = s – 1 e teremos r = s; Além disso, p_i é igual a algum q_j , para 2   i   r.

Assim, para 1   i   r teremos p_i igual a algum q_j , para algum j entre 1 e s. Logo, um número admite uma única decomposição em fatores primos.

III. 4) Análise – Seqüências

Toda seqüência limitada de números reais possui uma subseqüência convergente.

Hipótese: $\exists\ a, b \in \mathbb{R} \mid\ a \leq x_n \leq b,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

Tese: $\exists\ (x_{nk}) \rightarrow c\ ,\ \ c \in \mathbb{R}\ ,\ k \in \mathbb{N}$

Demonstração

Seja (x_n) uma seqüência de números reais. Como (x_n) é limitada em $\mathbb{R}$, existem dois números reais a e b tais que todo elemento de (x_n) está entre eles, ou seja, $x_n \in [a,b]$, para todo n natural.

Considere o conjunto A tal que:

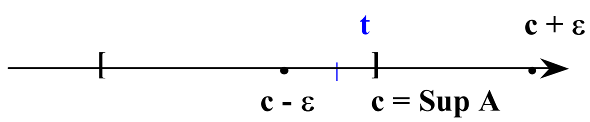
$$A = \{t \in \mathbb{R}\ /\ t \leq x_n, \text{ para uma infinidade de índices } n\} \qquad \textbf{(1)}$$

Logo, serão elementos de A todos os números reais t que sejam menores ou iguais a uma infinidade de termos x_n da seqüência (x_n).

Mostremos que A admite um supremo: para todo n natural, sabemos que $a \leq x_n \leq b$, portanto, a é elemento de A e não existe elemento em A maior do que b. Assim A é não vazio – pois a pertence a A – e superiormente limitado por b. Sendo A assim caracterizado, A admite um supremo c = Sup A.

A partir da definição de supremo, temos que:

$$\text{Para todo } \varepsilon > 0, \text{ existe um elemento } t \in \in A \text{ tal que } c - \varepsilon < t \qquad \textbf{(2)}$$



Repare de **(1)** e **(2)** que:

$$c - \varepsilon < t < x_n \Rightarrow c - \varepsilon < x_n \text{, para uma infinidade de índices n.} \qquad \textbf{(3)}$$

Vemos também que $c + \varepsilon$ não pertence a A, pois, se pertencesse, c não seria o supremo de A. Assim, $c + \varepsilon$ não desfruta da propriedade do conjunto A, ou seja, $c - \varepsilon > x_n$ para uma infinidade de índices n (eventualmente, $c + \varepsilon \leq x_n$ para um nº. finito de índices n).

Então, para uma infinidade de índices n temos:

$$c - \varepsilon < x_n < c + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < x_n - c < \varepsilon$$

$$|x_n - c| < \varepsilon$$

Esta "infinidade de índices n" dá origem a uma subseqüência $(x_n)_k$ de (x_n), da seguinte forma:

$$\varepsilon = 1 \text{ , } \exists\, x_{n1} \text{ tal que } c - 1 < x_{n1} < c + 1$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \text{ , } \exists\, x_{n2} \text{ tal que } c - \frac{1}{2} < x_{n2} < c + \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \text{ , } \exists\, x_{n3} \text{ tal que } c - \frac{1}{3} < x_{n3} < c + \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon = \frac{1}{k} \text{ , } \exists\, x_{nk} \text{ tal que } c - \frac{1}{k} < x_{nk} < c + \frac{1}{k}$$

$$\vdots$$

Então, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, k_0 > 0$ tal que $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$ e $\forall n_k \geq n_{k0}$, temos:

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_0} \text{ e } |x_{nk} - c| < \frac{1}{k} < \frac{1}{k_0} < \varepsilon$$

Logo, $(x_{nk}) \rightarrow c$.

CAPÍTULO IV
ANÁLISE EXPERIMENTAL

IV. 1) Introdução

A experimentação proposta tem por objetivo verificar o conhecimento de alunos do ensino médio sobre o assunto tratado neste trabalho – quantificadores e lógica matemática – quando aplicado a conteúdos estudados em séries anteriores, como noções de conjuntos, teoria de funções e geometria plana.

Houve preocupação em tomar como universo da experiência alunos que cursavam o terceiro ano do segundo grau ou pré-vestibular, visto que o conteúdo de lógica matemática e quantificadores nem sempre é aplicado a uma série especifica.

A metodologia aplicada no trabalho é descrita a seguir:

- Elaborou-se um questionário de uma única página contendo sete itens divididos em duas questões e relacionados com o assunto em estudo;
- Fez-se a distribuição deste questionário a 19 alunos do universo tratado; Cada um deles respondeu individualmente as questões;
- Não se estabeleceu tempo de entrega da atividade, porém foi pedido para que os estudantes cronometrassem seu tempo de resolução do questionário.

IV. 2) Cópia do Questionário

Segue-se neste tópico o questionário aplicado nesta atividade experimental e distribuído aos estudantes.

ATIVIDADE EXPERIMENTAL DE TCC 2 – QUANTIFICADORES

QUESTÃO 01. Assinale verdadeiro ou falso a cada item a seguir: Quando julgar falso o item, faça sua justificativa.

A. ( ) Existe um losango que não é trapézio;

B. ( ) Existe uma função bijetora que associa o conjunto dos números inteiros ao conjunto dos números naturais;

C. ( ) Para todo triângulo existe um ponto chamado baricentro e este ponto é único;

D. ( ) O conjunto de todas dízimas periódicas é parte do conjunto dos números irracionais;

E. ( ) Admita os conjuntos definidos abaixo:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \text{ é o número de lados de um polígono regular}\}$$

$$B = \{y \in \mathbb{R} \ / \ y \text{ é o número de diagonais de um polígono regular}\}$$

Portanto:

$$\forall x \in A \ \exists y \in B \ / \ y = \frac{x}{2}$$

QUESTÃO 02. Complete as lacunas:

A. Todo catarinense é brasileiro;
Todo brasileiro é sul-americano;
Portanto, ____

B. Nenhum triângulo é quadrado;
Todo quadrado é eqüilátero;
Portanto,____

IV. 3) Análise a Priori

Conforme vimos, o questionário é composto de duas questões:

- A primeira questão pede ao estudante um julgamento de verdadeiro ou falso dos cinco itens que se seguem. Além disso, quando o item for falso, o aluno deve justificar o porquê, mostrando, assim, seu conhecimento do assunto. Cada item desta questão relaciona tópicos teóricos de Matemática do ensino médio à idéia de quantificadores, seja a partir a linguagem convencional (Português), seja a partir da linguagem simbólica (Matemática);
- Na segunda questão foi posto em teste o conhecimento lógico do aluno, ao pedir que ele escrevesse a conclusão dos argumentos **A.** e **B.** seguindo as premissas de cada um.

Vejamos agora a resolução e alguns comentários de cada um dos itens presentes nas questões 01 e 02:

A) Questão 01 – Item A.

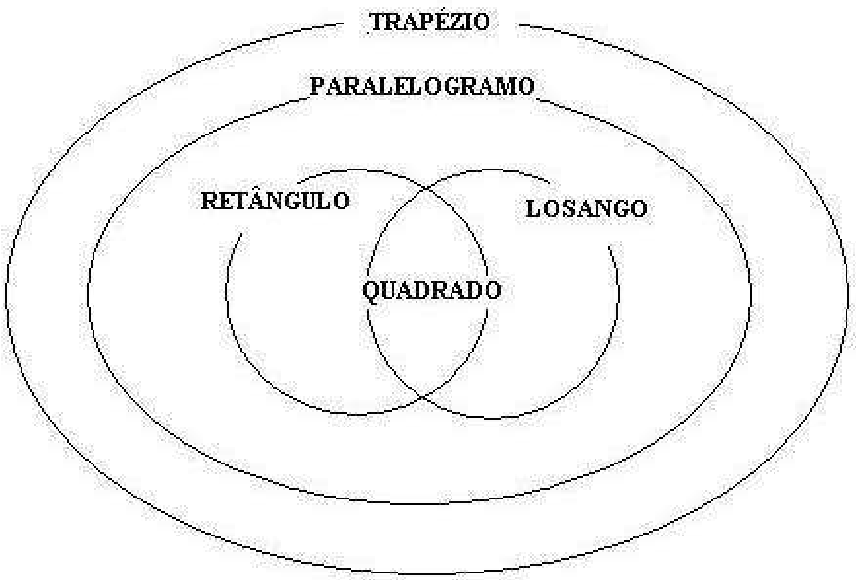
<u>Existe um losango que não é trapézio</u>

Item falso.

Justificativas:

- Define-se por trapézio todo quadrilátero com dois lados paralelos. O losango é definido por ser o quadrilátero com todos seus lados congruentes. Conseqüentemente, o losango apresenta seus lados paralelos dois a dois (como podemos demonstrar a partir de congruência de triângulos), logo, possui pelo menos dois lados paralelos, sendo, portanto trapézio. Concluímos, assim, que todo losango é trapézio.
- Podemos nos valer de um diagrama prático, relacionando todos os quadriláteros entre si a partir de suas características comuns, conforme a figura abaixo. Assim, por intersecção de conjuntos, notamos que o conjunto

de todos os losangos está contido no conjunto dos trapézios, portanto, não existe losango que não seja trapézio.



B) Questão 01 – Item B.

<u>Existe uma função bijetora que associa o conjunto dos números inteiros ao conjunto dos números naturais.</u>

Item verdadeiro.

Justificativas:

- Seja f a função que associa o conjunto dos números naturais ao conjunto dos números inteiros dada por:

$$f : N \to Z$$
$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2}, & \text{se } x \text{ for par} \\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{se } x \text{ for ímpar} \end{cases}$$

Provemos que f é bijetora.

1°) f é sobrejetora, pois para todo $y \in Z$ existe um $x \in N$ tal que:

$$x = \begin{cases} -2y & \text{, para } y \leq 0 \\ 2y - 1 & \text{, para } y > 0 \end{cases}$$

e teremos:

$$f(x) = f(-2y) = -\frac{(-2y)}{2} = y \qquad \text{, para } y \leq 0$$

$$f(x) = f(2y - 1) = \frac{(2y - 1) + 1}{2} = y \qquad \text{, para } y > 0$$

2°) f é injetora, pois, para todo $x_1, x_2 \in N$ temos que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Analisemos os casos:

- x_1 e x_2 são números pares

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$-\frac{x_1}{2} = -\frac{x_2}{2}$$

$$-\frac{x_1}{2} \times (-2) = -\frac{x_2}{2} \times (-2)$$

$$x_1 = x_2$$

- x_1 e x_2 são números ímpares

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{x_1 + 1}{2} = \frac{x_2 + 1}{2}$$

$$\frac{x_1 + 1}{2} \times (+2) = \frac{x_2 + 1}{2} \times (+2)$$

$$x_1 + 1 = x_2 + 1$$

$$x_1 + 1 + (-1) = x_2 + 1 + (-1)$$

$$x_1 = x_2$$

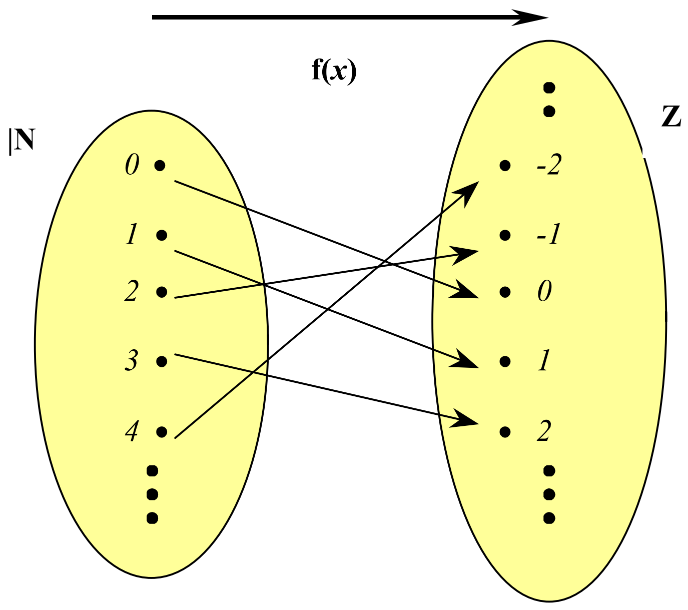
- x_1 par e x_2 ímpar e vice-versa – devido à diferença de paridade, naturalmente os números serão diferentes entre si:

$$x_1 = x_2$$

Assim, *f* é injetora.

Sendo *f* sobrejetora e injetora, provamos portanto que a função é bijetora.

- Podemos visualizar a correspondência biunívoca entre alguns elementos do domínio |N e do contradomínio Z a partir de diagramas de Venn:



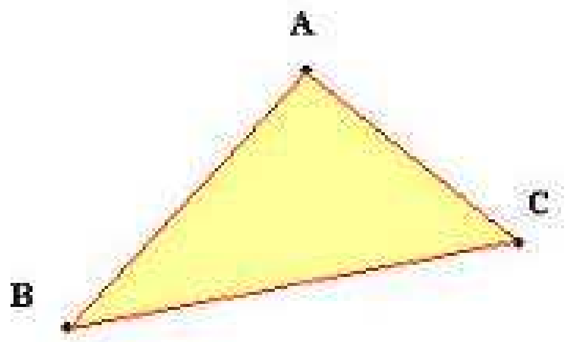
C) Questão 01 – Item C.

Para todo triângulo existe um ponto chamado baricentro e este ponto é único.

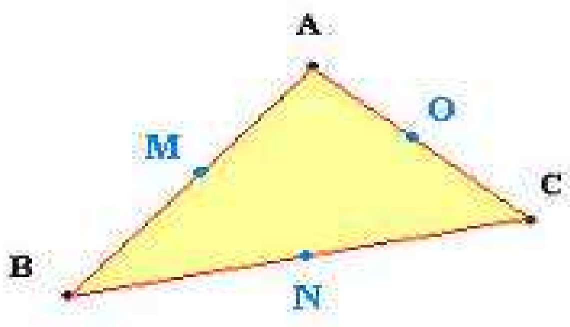
Item verdadeiro.

Justificativa:

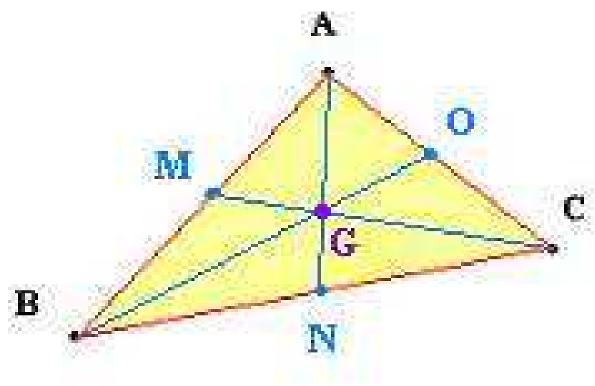
- Triângulo, por definição, é o polígono de três lados:



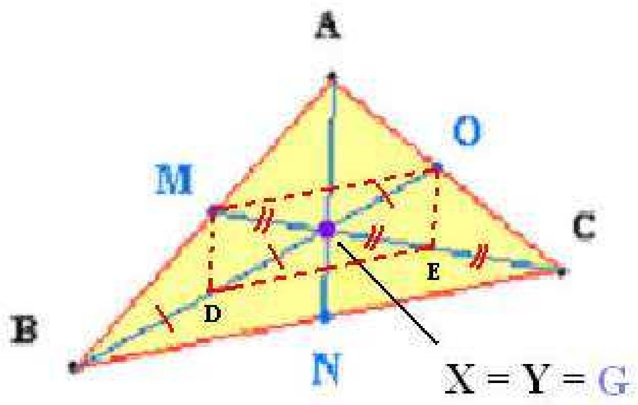
Assim, cada lado possui um ponto médio que o divide em dois segmentos equivalentes.



Um segmento de reta é chamado mediana de um triângulo, quando tiver como pontos extremos um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a este mesmo vértice. Assim, em todo triângulo temos um total de três medianas



que se encontram em um único ponto, chamado baricentro. Justifiquemos agora porque as três medianas se interceptam em um único ponto:



De acordo com a figura acima, seja X o ponto tal que:

$$BO \cap CM = \{X\}$$

Considerando os pontos médios D e E de BX e CX, temos o que se segue:

$(\Delta\ ABC,\ AM \equiv BM,\ AO \equiv CO) \Rightarrow MO\ //\ BC$ e $MO = BC/2$

$(\Delta\ XBC,\ XD \equiv BD,\ XE \equiv CE) \Rightarrow DE\ //\ BC$ e $DE = BC/2$

Logo,

$MO\ //\ DE$ e $MO \equiv DE \Rightarrow DEOM$ é paralelogramo e temos que:

$$DX \equiv XO \Rightarrow BX = 2 \bullet XO \qquad \textbf{(1)}$$

$$EX \equiv XM \Rightarrow CX = 2 \bullet XM \qquad \textbf{(2)}$$

Assim, a mediana BO intercepta a mediana CM em um ponto X tal que:

$$CX = 2 \bullet XM$$

Tomando-se as medianas AN e CM e sendo Y o ponto tal que:

$$AN \cap CM = \{Y\}$$

Analogamente, concluímos que:

$$CY = 2 \bullet YM \qquad \textbf{(3)}$$

$$AY = 2 \bullet YN \qquad \textbf{(4)}$$

De **(2)** e **(3)**, decorre que X = Y.
Chamando este ponto X = Y de G e considerando **(1)**, **(2)** e **(4),** temos:

$$AM \cap BO \cap CN = \{G\}$$

Portanto, as três medianas de um triângulo qualquer sempre se interceptam em um único ponto.

(E, além disso,

AG = 2 • GN , BG = 2 • GO , CG = 2 • CN)

D) Questão 01 – Item D.

O conjunto de todas dízimas periódicas é parte do conjunto dos números irracionais

Item falso.

Justificativa:

- Seja x uma dízima periódica, por exemplo:

$$x = 6{,}333$$

Valendo-se da soma de P.A., mostremos que x admite uma fração geratriz:

$$x = 6 + 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003\ldots$$

$$x = 6 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000}\ldots$$

$$x = 6 + 3 \times \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}\ldots \right)$$

$$x = 6 + 3 \times \left(\frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} \right)$$

$$x = 6 + 3 \times \left(\frac{1}{9} \right)$$

$$x = 6 + \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{19}{3}$$

Mas este número é racional, logo, não pertence ao conjunto dos irracionais. Assim, encontramos um elemento pertencente ao conjunto das dízimas periódicas, porém excluso do conjunto dos números irracionais. Logo, o conjunto de todas as dízimas periódicas não é parte do conjunto dos números irracionais.

E) Questão 01 – item E.

Admita os conjuntos definidos abaixo:

$A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x$ é o número de lados de um polígono regular$\}$

$B = \{y \in \mathbb{R} \,/\, y$ é o número de diagonais de um polígono regular$\}$

Portanto:

$$\forall x \in A\ \exists y \in B \,/\, y = \frac{x}{2}$$

Item falso.

Justificativas:

- A conclusão acima diz que para todo número de lados *x* de um polígono regular, existe um número de diagonais *y* tal que este número é dado pela relação:

  $$y = \frac{x}{2}$$

  Avaliemos um pentágono, por exemplo. Temos, neste caso, que o número de lados *x* vale:

  $$x = 5$$

  Utilizando a relação entre *y* e *x* dada pela questão o número de diagonais *y* deste polígono será:

  $$y = \frac{5}{2}$$

  Isto é falso, visto que o número de diagonais de qualquer polígono tem que ser natural.

  Assim, a relação entre o número de diagonais e de lados de um polígono, dada pela questão, é falsa.

- A conclusão acima diz que para todo número de lados x de um polígono regular, existe um número de diagonais y tal que este número é dado pela relação:

$$y = \frac{x}{2}$$

Podemos determinar o número de diagonais de um polígono partindo do princípio de análise combinatória. O número total t de segmentos distintos que se pode formar em qualquer polígono – lados e diagonais – é dado pela combinação da quantidade de todos seus lados x tomados dois a dois:

$$t = \binom{x}{2}$$

Como t representa a soma do número de lados com o número de diagonais, temos que:

$$t = x + y$$

Substituindo o valor de t da primeira expressão na segunda, poderemos determinar o número de diagonais em função da quantidade de lados do polígono:

$$\binom{x}{2} = x + y$$

$$\frac{x(x-1)}{2} = x + y$$

$$x^2 - x = 2x + 2y$$

$$x^2 - 3x = 2y$$

$$x(x-3) = 2y$$

$$2y = x(x-3)$$

$$y = \frac{x(x-3)}{2}$$

Portanto, a relação entre o número de diagonais y e lados x de um polígono qualquer é dada por:

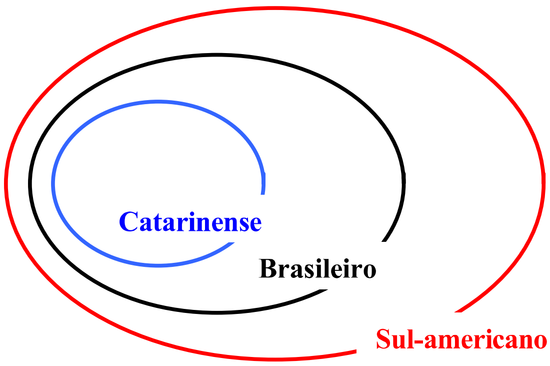
$$y = \frac{x(x-3)}{2}$$

F) Questão 02 – Item A.

Todo catarinense é brasileiro;
Todo brasileiro é sul-americano;
Portanto, **todo catarinense é sul-americano.**

Justificativa:

- A partir das premissas do argumento, podemos elaborar o diagrama que representa a situação em análise:



Conforme vemos, se o conjunto de todos elementos catarinenses está contido no conjunto daqueles que são brasileiros e, além disso, se todos os elementos deste último conjunto pertencem ao conjunto de pessoas que são sul-americanas, então o conjunto dos catarinenses está contido no conjunto dos sul-americanos.

Logo, todo catarinense é sul-americano – conclusão válida.

G) Questão 02 – Item B.

Nenhum triângulo é quadrado;

Todo quadrado é eqüilátero;

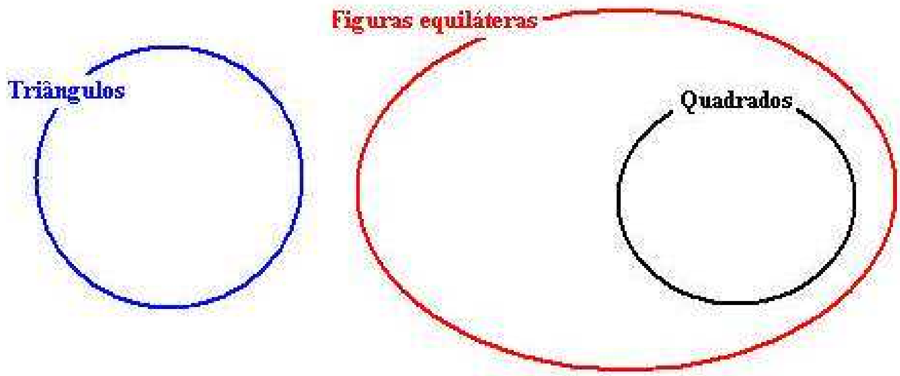
Portanto,____

Não há como chegarmos a uma nova conclusão válida.

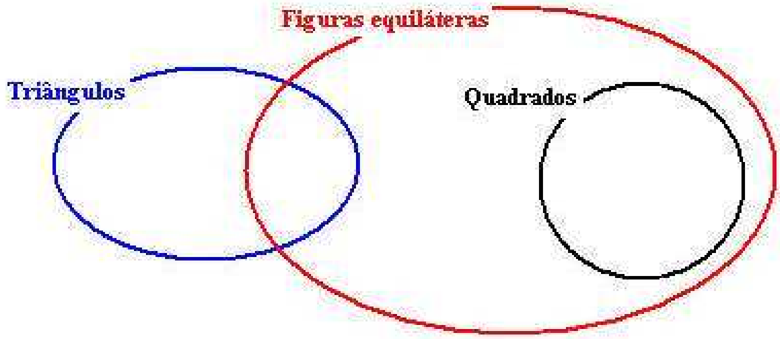
Justificativa:

- A partir das premissas do argumento, podemos elaborar os diagramas que representam a situação em análise:

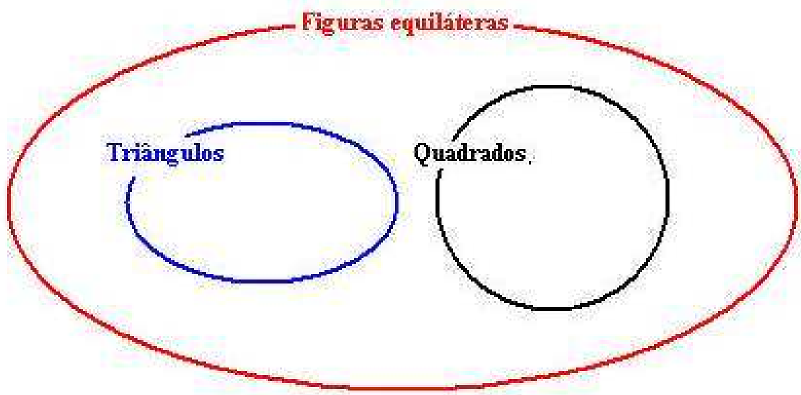
  - 1° Diagrama:



  - 2° Diagrama



➤ 3° Diagrama



O conjunto de todos triângulos e o conjunto de todos quadrados não podem possuir intersecção – de acordo com a premissa. Porém, de acordo com a segunda premissa, o conjunto de todos quadrados deve ser parte do conjunto das figuras eqüiláteras, conforme representado no diagrama.

Contudo, três conclusões a respeito da relação entre o conjunto de todos triângulos e o conjunto de figuras eqüiláteras são possíveis:

- **Nenhum triângulo é eqüilátero** – a partir do diagrama 1

- **Algum triângulo é eqüilátero** – a partir do diagrama 2

- **Todo triângulo é eqüilátero** – a partir do diagrama 3

Assim, o argumento em questão admite três conclusões. Mas isto é uma indeterminação da validade deste argumento, uma vez que não há premissa garantindo as três situações possíveis. O fato de sabermos que existem triângulos eqüiláteros não está explicitado pelas premissas, logo, nada podemos concluir a partir das premissas.

IV. 4) Análise dos Resultados

Comecemos com a análise dos itens da questão 01. Depois de recolhidos e corrigidos os 19 questionários dos estudantes, pôde-se elaborar uma tabela de acertos para cada item da questão. Os números em destaque referem-se à quantidade de estudantes que acertaram o item analisado.

Tabela 01 – Análise da questão 01 pelos 19 alunos que responderam ao questionário

Questão – Item	Verdadeiro	Falso	Em Branco
01 – A.	03	**15**	01
01 – B.	**11**	04	04
01 – C.	**15**	02	02
01 – D.	08	**11**	00
01 – E.	08	**07**	04

A) Item A. – Questão 01

Alunos que assinalaram **verdadeiro**: 03.

Alunos que assinalaram **falso**: **15.**

- Justificativas:
  1. A partir do diagrama de propriedades dos polígonos – 02 alunos;
  2. “Todo losango sempre será um trapézio, pois, para sê-lo basta ter dois lados opostos paralelos”. – 03 alunos;
  3. “Todo losango é trapézio”. – 05 alunos;
  4. Sem justificativas – 05 alunos.

Alunos que **não responderam** o item: 01.

Comentários:

A partir dos dados, vê-se que a afirmação não apresentou maiores dificuldades à maioria dos estudantes, visto que apenas três alunos erraram-na e um único aluno não a respondeu.

Quanto aos estudantes que julgaram falso o item, notamos que somente cinco das quinze justificativas foram coerentes com a teoria de polígonos, ou seja, as justificativas dos dois alunos que se valeram do diagrama de propriedades dos polígonos e as três justificativas que enunciaram o porquê de todo losango sempre ser um trapézio.

Notamos que, apesar da quantidade de acertos, nem todos estudantes souberam expressar o motivo pelo qual julgaram falsa a afirmação. Possivelmente por deterem apenas parte do conhecimento de teoria de Geometria Plana, bem como, pela dificuldade que tiveram em expressar suas idéias a partir do Português, sem se valer de números, fórmulas ou figuras geométricas.

B) Item B. – Questão 01

Alunos que assinalaram **verdadeiro**: **11.**

Alunos que assinalaram **falso**: 04.

- Justificativas:
  1. A partir do diagrama de Venn – 01 aluno;
  2. "Haverá sobra de elementos no contradomínio, logo não haverá função sobrejetora, podendo haver apenas injetora". – 03 alunos;

Alunos que **não responderam** o item: 04.

Comentários:

Um pouco mais da metade dos estudantes acertaram esta afirmação. Possivelmente, estudantes do curso pré-vestibular, os quais enfrentaram este mesmo item no vestibular passado. Logo, tomando conhecimento da veracidade do item, marcaram a alternativa correta.

Os alunos que julgaram falsa a afirmação souberam se expressar muito bem, utilizando tanto o auxílio ilustrativo (diagrama de Venn) como valendo-se das palavras para expressar sua justificativa. É um erro comum, para alunos de ensino médio, pensar que não há como enumerar o conjunto dos números inteiros, pois o que aprendem sobre funções injetora, sobrejetora e bijetora pouco se estende para além de classificação de funções, ou seja, exercícios aonde é dada uma função qualquer e pede-se para classificá-la em um desses três tipos é o máximo que se é apresentado aos estudantes.

Por estes mesmos motivos e falta de domínio do conteúdo de funções, é bem provável que quatro alunos tampouco souberam julgar a afirmação.

C) Item C. – Questão 01

Alunos que assinalaram **verdadeiro**: **15.**

Alunos que assinalaram **falso**: 02.

- Justificativas:

    1. “Porque cada triângulo tem um ponto de equilíbrio”. – 01 aluno;
    2. Sem justificativas – 01 aluno.

Alunos que **não responderam** o item: 02.

Comentários:

Item sem maiores problemas, na avaliação dos alunos, havendo boa quantidade de acertos da afirmação e demonstrando bons conhecimentos de pontos notáveis do triângulo por parte dos estudantes.

Um dos alunos deve ter feito uma interpretação errônea da questão ao julgar falso a existência e unicidade do baricentro em todo triângulo, afirmando que “cada triângulo tem um ponto de equilíbrio” – que é o próprio baricentro do triângulo. Possivelmente este aluno, o outro que não justificou a falsidade do item, e os outros dois que não responderem o item devem ter tido problemas com a interpretação da questão – especialmente no trecho de afirmação da unicidade: “... e este ponto é único”.

D) Item D. – Questão 01

Alunos que assinalaram **verdadeiro**: 08.

Alunos que assinalaram **falso**: **11.**

- Justificativas:
  1. "Não. O conjunto de todas dízimas periódicas faz parte do conjunto dos números racionais". As dízimas não periódicas é que fazem parte dos números irracionais – 01 aluno;
  2. "O conjunto das dízimas periódicas é parte do conjunto dos números racionais". – 04 alunos;
  3. Sem justificativas – 06 alunos.

Alunos que **não responderam** o item: nenhum.

Comentários:

Esta afirmação dividiu o julgamento dos alunos. Vemos que pouco mais da metade dos estudantes assinalou "falso" neste item, sendo que apenas um merece destaque na sua justificativa, visto que, apesar de não se valer de um contra-exemplo – conforme fora feito na análise a priori – soube argumentar a quais conjuntos numéricos pertencem às dízimas periódicas e não periódicas. Quatro alunos corrigiram o item sem, contudo, estender-se na sua justificativa, enquanto que seis não souberam dizer o porquê do julgamento "falso", dado ao item em questão.

Reparemos que o quantificador "todas" aplicado à "dízimas periódicas" torna mais difícil o julgamento do enunciado ao aluno que tem apenas um domínio mediano ou pequeno do conteúdo tratado. Dos dezenove alunos, oito não obtiveram êxito em sua resposta, donde podemos concluir que há uma deficiência no conteúdo de noções de conjuntos numéricos por parte destes alunos.

E) Item E. – Questão 01

Alunos que assinalaram **verdadeiro**: 08.

Alunos que assinalaram **falso**: **07.**

- Justificativas:
  1. A partir de um contra-exemplo – 03 alunos;
  2. Enunciando a fórmula do número de diagonais de um polígono qualquer em função do número de lados – 02 alunos;
  3. Sem justificativas – 02 alunos.

Alunos que **não responderam** o item: 04.

Comentários:

Nesta afirmação, certamente, a grande dificuldade dos estudantes em analisá-la deveu-se à interpretação da linguagem simbólico-matemática presente no final do seu enunciado. Podemos verificar que mais da metade dos alunos não lograram êxito neste item, onde oito estudantes erraram-no, enquanto que outros quatro não souberam avaliá-lo.

Destaque a cinco dos sete alunos que acertaram o resultado, mostrando bons conhecimentos de interpretação de linguagem matemática, linguagem de conjuntos e noções de teoria de polígonos. Dois estudantes deste grupo provavelmente não possuíam conhecimento suficiente a respeito de um desses conteúdos, e não souberam justificar o porquê da não verdade da afirmação.

Analisemos agora a questão 02, valendo-nos das respostas dos estudantes e do estudo a priori de cada um de seus itens. Após recolhidos e corrigidos os questionários dos estudantes, pôde-se elaborar uma tabela da quantidade de alunos que chegaram a conclusões válidas e não válidas para cada item da questão.

Tabela 02 – Análise da questão 02 pelos 19 alunos que responderam ao questionário

Questão – Item	Conclusão válida	Conclusão não válida	Em branco
02 – A.	17	02	00
02 – B.	00	19	00

F) Item A. – Questão 02

Respostas dadas pelos alunos:

1. "Todo catarinense é sul-americano". – 16 alunos;
2. "Todo catarinense é brasileiro". – 01 aluno;
3. "Todo sul-americano é americano" – 01 aluno;
4. "Americano". – 01 aluno.

Comentários:

Grande parte dos estudantes seguiu corretamente o raciocínio do argumento, finalizando-o com uma conclusão válida, a qual relaciona o quantificador "todo" ao universo de catarinenses e americanos. Repare que ter como conclusões "Todo catarinense é brasileiro" ou " Todo brasileiro é americano" são válidas, uma vez que não foi solicitado que a conclusão fosse diferente das premissas.

G) Item B. – Questão 02

Respostas dadas pelos alunos:

1. “Nem todo triângulo é eqüilátero”. – 10 alunos;
2. “Todos triângulos e quadrados são diferentes, mas existem triângulos eqüiláteros”. – 01 aluno;
3. “Nem todo eqüilátero é quadrado, então é possível que haja um triângulo eqüilátero”. – 01 aluno;
4. “O quadrado pode ou não ser triângulo”. – 01 aluno;
5. “Nenhum triângulo é quadrado e eqüilátero”. – 02 alunos;
6. “Todo quadrado não é um triângulo”. – 01 aluno;
7. “Em cada quadrado existem quatro triângulos”. – 01 aluno;
8. “Existem diferentes formas”. – 01 aluno;
9. “Têm todos lados iguais”. – 01 aluno.

Comentários:

O item deixou muitos alunos em impasse, pois, diferentemente da forma com que resolveram o primeiro item dessa questão, não havia como relacionar de forma única o conjunto dos triângulos com o das formas eqüiláteras, valendo-se apenas das premissas dadas pelo argumento.

Nenhum estudante chegou a tal conclusão, porém dez deles, utilizando adicionalmente seus conhecimentos de geometria plana, obtiveram uma conclusão verdadeira ao enunciar que “Nem todo triângulo é eqüilátero”. Porém, esta é apenas uma das conclusões que poderíamos chegar, mas não a priori, das premissas dadas. Conforme analisamos anteriormente, seguindo a lógica, poderíamos ter como conclusões:

- “Nenhum triângulo é eqüilátero”;
- “Todos triângulos são eqüiláteros”.

Mesmo que falsas, estas conclusões também são possíveis, visto que as premissas do argumento deste item não sustentam uma única conclusão. Fato este comprovado pelos demais nove estudantes que tentaram relacionar o conjunto dos triângulos não apenas ao das formas eqüiláteras, mas ao dos quadrados ou mesmo aos das diferentes formas e dos lados iguais – nem sequer enunciados nas premissas.

CONCLUSÃO

Vimos que o estudo de quantificadores está diretamente relacionado com o desenvolvimento da Lógica. Isto torna o tema muito mais rico e interessante, visto que, sendo considerada mãe de todas as ciências, a Lógica pode ser aplicada em inúmeras atividades interdisciplinares. Podemos tomar este trabalho como exemplo, onde relacionamos disciplinas como História, Português e Matemática que parecem, a princípio, impassíveis de intersecção – conforme vemos desde cedo em inúmeras escolas primárias e secundárias.

Aprendemos também que, antes de analisarmos qualquer teorema ou argumento matemático, além ter em mente o significado dos conceitos pré-requisitados para sua análise, faz-se de grande importância entender a estrutura lógica do teorema em questão. Diferenciar quais proposições compõem a hipótese e a tese do mesmo, saber como ambas se mostram relacionadas a partir da conectiva lógica entre elas e por fim, identificar os quantificadores presentes em cada uma das proposições que compõem hipótese e tese, haja visto a faculdade que têm os quantificadores em modificar as próprias proposições, dando não só a elas um caráter existencial ou universal mas estendendo ao próprio teorema esta propriedade.

Por fim, a atividade experimental faz-nos refletir em como a abordagem da teoria matemática é conhecida por parte dos estudantes. Constatou-se que nas questões de Geometria houve uma quantidade maior de acertos do que em todas as demais. Possivelmente porque a ilustração da figura geométrica permite ao aluno conclusões mais rápidas e concretas, sem contar o fato de que os polígonos em questão – losango, quadrilátero e triângulo – são trabalhados desde o ensino fundamental e revistos no ensino médio, o que aumenta a chance do estudante conhecer suas propriedades e ter sucesso nas questões. Exceção à regra ocorreu no item E da primeira questão, onde a interpretação deste item dependia da linguagem simbólico-matemática presente no final do seu enunciado, o que nos leva a crer que há uma deficiência no ensino desta linguagem.

Ainda em relação à experiência, cerca de apenas metade dos estudantes obtiveram êxito nas questões envolvendo Álgebra (conjuntos e funções). Acreditamos que tais questões não sejam tão imediatas como as de Geometria não apenas pelo nível de dificuldade de cada uma, mas por não terem sido direcionadas tanto ao cotidiano, à ilustração concreta, ou a alguma aplicação. Procuramos verificar o <u>conhecimento teórico</u> do conteúdo presente em cada uma delas, ou seja, classificação de conjuntos numéricos e tipos de funções. Como previsto, há brechas a serem preenchidas em pelo menos metade dos alunos não apenas no conteúdo acima, mas no próprio domínio da Lógica, já que nenhum estudante soube responder satisfatoriamente o último item da segunda questão.

Tamanho não é documento, como já diria o dito popular! Como imaginar que um assunto tão raro de se comentar tal como o tratado neste TCC, acarretaria em tantas conclusões? Aprendemos que a aliança entre o conhecimento teórico a atividades ilustrativas e interdisciplinares seria um ótimo recurso ao ensino dos quantificadores, bem como à Matemática como um todo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASTOS, Cleverson L / KELLER, Vicente. **Aprendendo Lógica.** 5ª. ed. Petrópolis: Vozes, 1997.

BOLL, Marcel / REINHART, Jacques. **A História da Lógica.** 1ª. ed. Rio de Janeiro: Edições 70, 1992.

DOLCE, Osvaldo / POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Volume 9 – 7 ª. ed. São Paulo: Atual, 1997.

DOLCE, Osvaldo / POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Volume 10 – 7 ª. ed. São Paulo: Atual, 1997.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos da Aritmética.** 1 ª. ed. São Paulo: Atual, 1997.

IEZZI, Gelson / MURAMAKI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Volume 1 – 7 ª. ed. São Paulo: Atual, 1997.

LAUSCHNER Roque. **Lógica Formal.** 2 ª. ed. Porto Alegre: Sulina, 1971.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise.** Volume 1 – 10 ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2002

NAHRA, Cinara / WEBER, Ivan Hingo. **Através da Lógica.** 1 ª. ed. Petrópolis: Vozes, 1997.

SALMON, Wesley C. **Lógica.** 3 ª. ed. Prentice / Hall do Brasil.

.