

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
GRADUAÇÃO EM LICENCIATURA MATEMÁTICA

REGIÕES DE ESTABILIDADE DE  
MÉTODOS NUMÉRICOS PARA  
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Kett Regina de Aguiar da Silva

Florianópolis - Santa Catarina

Fevereiro de 2007

Universidade Federal de Santa Catarina  
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Departamento de Matemática  
Curso de Matemática

# Regiões de Estabilidade de Métodos Numéricos para Equações Diferenciais

Kett Regina de Aguiar da Silva

Orientador: Milton dos Santos Brait

Florianópolis - Santa Catarina

Fevereiro de 2007

Universidade Federal de Santa Catarina  
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Departamento de Matemática  
Curso de Matemática

# Regiões de Estabilidade de Métodos Numéricos para Equações Diferenciais

Este trabalho foi apresentado ao curso de graduação em matemática da Universidade Federal de Santa Catarina, como trabalho de conclusão de curso, para a obtenção do grau de licenciado em Matemática.

**Kett Regina de Aguiar da Silva**

Florianópolis - Santa Catarina

Fevereiro de 2007

Esta monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n° 02/CCM/07.

---

**Prof<sup>a</sup>. Carmen Suzane Comitre Gimenez**

Professora responsável pela disciplina

Banca examinadora:

---

**Prof. Dr. Milton dos Santos Brait**

Depto. de Matemática\ UFSC (Orientador)

---

**Prof. Dr. Jáuber Cavalcante de Oliveira**

Depto. de Matemática\ UFSC

---

**Prof. Dr. Fermím Sinfiorano Viloche Bazán**

Depto. de Matemática\ UFSC

A Jesus filho do Deus altíssimo, que ilumina e protege os meus caminhos.

Aos meus pais, Valdir e Tânia, pelo exemplo de vida.

Ao meu esposo, Marlon, pelo incentivo.

A minha irmã, Grazyela, pelo apoio.

# Agradecimentos

Ao longo da minha Graduação, foram vários os amigos aos quais tive o prazer de conviver. Muitos professores e colegas contribuíram para a minha formação pessoal e acadêmica. A essas pessoas maravilhosas que Deus colocou em minha vida, os meus sinceros agradecimentos.

Agradeço aos meus pais, Valdir e Tânia, pelo acesso à educação, incentivo, apoio e a significativa presença que tiveram durante toda a graduação, e serão lembrados com muito amor e carinho.

A minha irmã Grazyela, ao afeto, paciência e valioso apoio prestado durante toda a graduação.

Ao meu esposo Marlon, por sua constante presença, palavras de estímulos e por sua compreensão no decorrer desta trajetória.

Aos amigos da Secretaria, devido ao profissionalismo e carinho que sempre me trataram.

Em especial, agradeço ao Professor Milton dos Santos Braitt, pela orientação e conhecimento transmitido no desenvolvimento deste trabalho, tornando possível a sua elaboração.

Enfim, agradeço aos Professores Jáuler Cavalcante de Oliveira e Fermín Sinfiriano Viloche Bazán, que se dispuseram a compor a comissão examinadora deste trabalho, e pelas sugestões apresentadas.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>1 Introdução às Equações Diferenciais e Métodos Numéricos</b>	<b>9</b>
1.1 Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias . . . . .	9
1.2 Soluções Aproximadas de EDO's . . . . .	13
1.3 Convergência . . . . .	16
1.4 Métodos de Passo Múltiplo . . . . .	20
<b>2 Estabilidade e Consistência</b>	<b>23</b>
2.1 Estabilidade das Equações Diferenciais . . . . .	23
2.2 Estabilidade dos Métodos Numéricos . . . . .	25
2.3 Consistência . . . . .	26
2.4 Consistência em Métodos de Passo Múltiplo . . . . .	30
2.5 Teorema de Lax . . . . .	32
<b>3 Regiões de Estabilidade</b>	<b>35</b>
3.1 Equações “Stiff” . . . . .	36
3.2 Erro de Arredondamento e Estabilidade . . . . .	38
3.3 Estabilidade em Métodos de Passo Múltiplo . . . . .	39
3.4 Região de Estabilidade Absoluta . . . . .	42
3.5 Regiões de Estabilidade Absoluta para Métodos de Passo Múltiplo . . . . .	46
<b>4 Aplicações</b>	<b>48</b>
<b>Conclusão</b>	<b>54</b>

<b>Apêndices</b>	<b>54</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>62</b>

# Introdução

Muitos problemas encontrados na engenharia, física, biologia e outras ciências podem ser formulados em termos de equações diferenciais. Contudo, a grande maioria das soluções das equações encontradas na prática não podem ser expressas através de funções elementares. Nestes casos os métodos numéricos são a saída para encontrar soluções aproximadas.

Os conceitos mais básicos relacionados aos métodos numéricos são o de convergência, consistência e estabilidade. Neste trabalho vamos apresentá-los e dar exemplos simples com o objetivo de familiarizar o leitor com esses conceitos e com o teorema de equivalência de Lax que faz a ligação entre eles.

Veremos também o conceito de regiões de estabilidade que nos fornece um meio prático para analisar o comportamento dos métodos numéricos. Por último apresentaremos algumas aplicações para ilustrar o comportamento estável e instável das soluções numéricas.

Esperamos com este trabalho apresentar alguns dos temas básicos sobre métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias (EDO's), e que possa servir como introdução para estudos mais avançados deste assunto.

Para a compreensão deste trabalho, é desejável que o leitor tenha algum conhecimento em cálculo diferencial e integral de funções de várias variáveis. Normalmente estes assuntos são abordados nas duas disciplinas iniciais de cálculo dos cursos tecnológicos e de ciências exatas.

# Capítulo 1

## Introdução às Equações Diferenciais e Métodos Numéricos

Neste capítulo veremos alguns elementos da teoria básica das equações diferenciais ordinárias, em particular os teoremas de existência e unicidade das soluções. Veremos também o conceito mais básico de um método numérico que é a convergência.

### 1.1 Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias

Chamamos de **Equação Diferencial** a uma equação que envolve uma função incógnita e suas derivadas, em uma ou mais variáveis independentes. A ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que nela aparecer.

Havendo somente uma variável independente, a equação é chamada de **Equação Diferencial Ordinária** ou EDO. Se houver duas ou mais variáveis independentes, a equação é chamada de **Equação Diferencial Parcial** ou EDP.

Neste trabalho, estudaremos somente temas relacionados a EDO's.

Uma função  $f$  é chamada de **solução de uma equação diferencial**, se a substituição da função desconhecida e suas derivadas por  $f$  e suas derivadas, resultar na igualdade desta equação para todos os elementos do domínio de  $f$ , o qual será aqui sempre considerado como um subconjunto do conjunto dos números reais.

Se uma equação diferencial de ordem  $m$  e as suas derivadas até a ordem

$m - 1$  forem especificadas em um mesmo ponto, tal conjunto de condições chamamos de **condições iniciais** ou CI. O problema que consiste em achar as soluções de uma EDO que satisfazem as CI é chamado de **problema de valor inicial** ou PVI. Vejamos um exemplo:

**Exemplo 1.1** *Vamos procurar uma solução do seguinte problema de valor inicial:*

$$\begin{cases} y' &= 10y \\ y(0) &= 20 \end{cases} \quad (1.1)$$

Aplicando a conhecida técnica de separação de variáveis ([1] p. 1141 a 1144) podemos obter uma solução:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 10y, \\ \frac{dy}{y} &= 10dt. \end{aligned}$$

Integrando obtemos  $y(t) = C e^{10t}$  com  $C$  sendo uma constante arbitrária. Aplicando a CI  $y(0) = 20$  temos  $y(0) = C e^{10 \cdot 0} = C$ , portanto  $C = 20$ . Assim obtemos a seguinte função

$$y(t) = 20e^{10 \cdot t}$$

que é uma solução do PVI (1.1).

Encontrada uma solução surge a seguinte pergunta, será que existe uma outra solução, ou seja, a solução encontrada acima é única? De maneira geral, queremos saber se **existe** solução de um PVI e se existir a solução, se ela é **única**.

Vejamos um teorema que garante a existência e a unicidade de um PVI.

**Teorema 1.1** (Existência e Unicidade de um PVI)

*Seja a equação diferencial  $y' = f(t, y)$ , onde a função  $f$  é contínua, com derivadas contínuas em relação a  $y$ , em uma região com coordenadas retangulares  $(t, y)$ . Então através de cada ponto  $(t_0, y_0)$ , existirá uma e somente uma solução  $y(t)$  da equação diferencial com  $y(t_0) = y_0$ .*

A demonstração do teorema 1.1 pode ser vista em [2] (p. 451 e 459). Vejamos a aplicação deste teorema no exemplo a seguir.

**Exemplo 1.2** Usando o teorema 1.1, determine se o PVI abaixo, tem uma única solução e encontre esta solução.

$$\begin{cases} y' &= y^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

O teorema 1.1 garante que esse problema tem uma única solução pois,  $f(t, y) = y^2$  e  $y' = 2y$  são contínuas em  $\mathcal{R}^2$ .

Para encontrar a solução, usaremos o mesmo método do exemplo 1.1:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y^2, \\ \text{ou então } y^{-2}dy &= dt, \quad y \neq 0. \end{aligned}$$

Integrando temos  $-y^{-1} = t + C$ , assim  $y = -\frac{1}{t+C}$ . Para satisfazer a CI, devemos escolher  $C = -1$ , desta forma obtemos a seguinte função

$$y(t) = \frac{1}{1-t}$$

que é a solução do PVI (1.2).

O teorema 1.1 pede que a função  $f$  tenha derivadas contínuas. Vejamos agora um outro teorema que exige menos. O teorema 1.2 tem como hipótese que a função  $f$  satisfaça a **Condição de Lipschitz** na variável  $y$ , no entanto ele só garante a unicidade da solução.

Vejamos inicialmente a definição desta condição.

**Definição 1.1** (Condição de Lipschitz)

Uma função  $f(t, y)$  satisfaz a **Condição de Lipschitz** na variável  $y$  no conjunto  $D \subset \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$ , com a constante  $L > 0$ , se satisfaz a seguinte propriedade:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

para qualquer  $(t, y_1), (t, y_2) \in D$ , com  $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$ . A constante  $L$  é chamada de constante de Lipschitz para  $f$  em  $D$ .

**Teorema 1.2** (Unicidade da Solução em um PVI)

Seja o PVI:

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

onde  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$  e  $y : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  uma função contínua nas variáveis  $t$  e  $y$ , para todo  $(t, y) \in D$  e  $(t_0, y_0)$  um ponto interior de  $D$ .

Se  $f$  satisfaz à Condição de Lipschitz na variável  $y$ , então o PVI (1.3) tem uma única solução.

A demonstração do teorema 1.2 pode ser vista em [5] (p. 336).

Vejamos uma aplicação deste teorema no exemplo a seguir.

**Exemplo 1.3** Usando o teorema 1.2, verifique se o PVI abaixo, tem uma única solução.

$$\begin{cases} y' &= t + y \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad (1.4)$$

Temos que  $f(t, y) = t + y$  é uma função contínua em  $\mathcal{R}^2$  na variável  $t$  e  $y$ . Agora vejamos se a função  $f(t, y)$  satisfaz a Condição de Lipschitz na variável  $y$ .

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |t + y_1 - (t + y_2)| = |t + y_1 - t - y_2| = |y_1 - y_2|. \quad \text{Aqui temos } L = 1.$$

Como  $f$  é contínua e satisfaz a Condição de Lipschitz na variável  $y$ , o teorema 1.2 garante que esse problema tem uma única solução em  $\mathcal{R}^2$ . Assim do PVI (1.4) temos:

$$y' - y = t \quad (1.5)$$

Para obter a solução, vamos multiplicar ambos os lados da equação (1.5) pelo fator de integração  $\varphi(t)$ . Para maiores detalhes sobre o fator de integração, veja [6] (p. 13).

O fator de integração é  $\varphi(t) = e^{\int -dt} = e^{-t}$ , assim:

$$\begin{aligned} e^{-t}y' - e^{-t}y &= e^{-t}t, \\ \text{ou } (e^{-t}y)' &= e^{-t}t. \end{aligned}$$

Integrando a equação acima temos

$$\begin{aligned} e^{-t}y &= e^{-t}(-t - 1) + C, \\ \text{ou seja } y(t) &= -t - 1 + Ce^{-t}. \end{aligned}$$

Para satisfazer a CI, devemos escolher  $C = 2$ , desta forma obtemos a seguinte função

$$y(t) = 2e^t - t - 1$$

que é a solução do PVI (1.4). Apresentamos nesta seção alguns resultados sobre existência e unicidade de soluções de EDO's. Para um estudo mais completo deste tema, indicamos [6].

Veja que todas as soluções encontradas nos exemplos anteriores foram expressas por **funções elementares**. Tradicionalmente são chamadas de **funções elementares** as funções do tipo polinomial, trigonométrica, exponencial e logarítmica. Mas nem sempre conseguimos soluções dadas através de funções elementares. Isto nos leva a procurar soluções por um outro meio.

## 1.2 Soluções Aproximadas de EDO's

Existem várias técnicas para procurar uma solução de um PVI, mas nem sempre é possível obtermos a solução expressa através de funções elementares. Por exemplo, a equação  $y' = 1 - 2xy$  tem como solução

$$y(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt.$$

Esta solução não pode ser expressa por uma função elementar. A prova deste fato envolve a teoria de Galois diferencial (veja [9]). Nestes casos podemos usar os chamados métodos numéricos para encontrar uma **solução aproximada**.

### Definição 1.2 (Solução Numérica Aproximada)

*Chamamos de solução numérica aproximada uma função definida em um conjunto finito de pontos, dentro do intervalo onde está a solução exata da equação diferencial e que possui as seguintes características:*

1. *Esteja próxima (ponto a ponto ou em algum sentido) da solução exata.*
2. *Seja calculada através de operações aritméticas (para serem realizadas via computador).*

Os métodos utilizados para calcular soluções numéricas são chamados de **métodos numéricos**.

Vamos agora apresentar alguns exemplos de métodos que aproximam a solução numérica. Vejamos inicialmente a notação que usaremos ao longo deste trabalho.

Seja o seguinte PVI

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= \alpha, \quad a \leq t \leq b \end{cases}$$

Considere os seguintes pontos igualmente espaçados:

$$h = \frac{b-a}{N} \quad \text{e} \quad t_i = a + ih, \quad \text{para} \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

onde  $h$  é o espaçamento dos pontos, também denominado de passo,  $N$  é o número de passos e  $t_i$  os pontos do domínio da solução numérica. Representaremos o valor da solução em  $t_i$  por  $y(t_i)$  e o valor da solução aproximada por  $w_i$  correspondente.

Existem diversos métodos numéricos para aproximar a solução de um PVI. Vamos ver um exemplo com a aplicação de um dos métodos numéricos mais simples, o **Método de Euler**.

**Exemplo 1.4** *Vamos, estimar  $y(1)$  pelo Método de Euler com  $h = 0,25$  do seguinte PVI:*

$$\begin{cases} y' &= 0,04y \\ y(0) &= 1000 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.6)$$

O Método de Euler (veja em [3] p. 237) é dado através da seguinte equação de diferença:

$$\begin{cases} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + hf(t_i, w_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Substituindo os valores para o PVI (1.6) temos

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + h 0,04w_i, \\ w_{i+1} &= w_i(1 + 0,04h), \quad \text{para} \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (1.7)$$

A equação (1.7) é chamada de **equação de diferença** associada ao método de Euler.

Para  $i = 0$ :

$$w_1 = w_0(1 + 0,04h).$$

Para  $i = 1$ :

$$\begin{aligned} w_2 &= w_1(1 + 0,04h), \\ \text{ou} \quad w_2 &= w_0(1 + 0,04h)^2. \end{aligned}$$

Prosseguindo deste modo até  $i = N - 1$ , obtemos:

$$w_j = w_0(1 + 0,04h)^j \quad \text{para } j = 1, \dots, N. \quad (1.8)$$

Esta é a solução da equação de diferença (1.7).

Como  $h = 0,25$  e  $0 \leq t \leq 1$  temos  $N = 4$ .

Substituindo  $w_0, h$  e  $N$  na equação (1.8) obtemos

$$\begin{aligned} w_4 &= 1000(1 + 0,04 \cdot 0,25)^4 \quad \text{ou seja,} \\ w_4 &= 1040,6040. \end{aligned}$$

Assim  $w_4$  é o valor aproximado para  $y(1)$ . Vamos agora calcular o valor exato de  $y(1)$ .

Sabemos que a solução deste PVI é  $y(t) = 1000 \cdot e^{0,04t}$ , então  $y(1) = 1000 \cdot e^{0,04} \cong 1040,8108$ , que é uma aproximação para esta solução com quatro casas decimais de precisão. Nesta aproximação teremos um erro de 0,00005 para mais ou para menos, ou seja, a solução exata deste PVI está dentro do intervalo  $1040,8108 \pm 0,00005$ .

Fazendo a diferença entre o valor exato e o valor aproximado ( $w_4$ ), obtemos o erro de aproximação. Desta forma o erro cometido foi de no máximo  $|y(1) - w_4| = |1040,81085 - 1040,6040| = 0,20685$ .

Mas o que aconteceria se no exemplo 1.4 o tamanho do passo fosse diminuído para  $h = 0,1$ ?

Com  $h = 0,1$  temos  $N = 10$ . Substituindo estes valores na equação (1.8)

obtemos:

$$\begin{aligned}w_{10} &= 1000(1 + 0,04 \cdot 0,1)^{10} \quad \text{ou seja,} \\w_{10} &= 1040,7277.\end{aligned}$$

Observe que agora temos uma melhor aproximação para  $y(1)$ , e o erro cometido foi de no máximo  $|y(1) - w_{10}| = 0,08315$ . Note que, a medida que diminuimos o tamanho do passo, o valor do erro cometido também diminui. Desta forma, encontramos um  $w_i$  mais próximo da solução exata.

Será que se continuarmos a diminuir o tamanho do passo, o  $w_i$  estará cada vez mais próximo da solução exata? Isto é algo que gostaríamos de ter (na prática nem sempre é verdade, veja erro de arredondamento [3] p. 240). Esta característica desejável nos leva ao conceito de convergência.

### 1.3 Convergência

Uma das propriedades mais básicas de um método numérico para aproximar soluções de uma equação diferencial é a precisão. Já que estamos calculando soluções aproximadas, gostaríamos que os métodos sejam capazes de nos fornecer soluções mais precisas se assim desejarmos.

Vejamos então uma definição para este conceito.

#### Definição 1.3 (Convergência)

*Um método numérico de passo simples é dito convergente se, para qualquer  $t \in [a, b]$ ,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} |w_i - y(t)| = 0, \quad \text{onde } ih = t - a.$$

Intuitivamente podemos dizer que um método numérico é **convergente** quando a solução da equação de diferença aproxima-se ponto a ponto da solução da EDO, quando o tamanho do passo tende a zero. Observe que para cada  $h$ ,  $w_i$  é resultado de  $i$  passos do método.

Vamos ver o que acontece com o PVI do exemplo 1.4 utilizando outro

método numérico de passo simples, como por exemplo, o **Método de Euler Aperfeiçoado** (Runge-Kutta 2º ordem [3] p. 244). Mais adiante veremos um exemplo para um **método de passo múltiplo**.

**Exemplo 1.5** Vamos, estimar  $y(1)$  pelo Método de Euler e Euler Aperfeiçoado variando o tamanho do passo para o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' = 0,04y \\ y(0) = 1000 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.9)$$

O Método de Euler Aperfeiçoado é da forma

$$\begin{cases} w_0 = \alpha \\ w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))], \quad i = 0, 1, \dots, N - 1. \end{cases}$$

Neste exemplo temos

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{2}[0,04w_i + 0,04w_i + (0,04)^2hw_i] \quad , \\ w_{i+1} &= w_i(1 + 0,04h + (0,04)^2\frac{h^2}{2}). \end{aligned}$$

Analogamente ao Método de Euler, obtemos

$$w_j = 1000(1 + 0,04h + (0,04)^2\frac{h^2}{2})^j, \quad \text{para } j = 1, \dots, N. \quad (1.10)$$

Substituindo  $h$  e  $j$  nas equações (1.8) e (1.10) obtemos os valores da tabela 1.1, onde o valor exato de  $y(1)$  é 1040,8108 .

$h$	$j$	<i>Euler</i>	<i>EulerAperf.</i>	<i>ErroEuler</i>	<i>ErroEulerAp.</i>
1	1	1040	1040,80	0,8108	0,0108
0,5	2	1040,4	1040,808	0,4108	0,0028
0,25	4	1040,604	1040,8101	0,2068	0,0007
0,1	10	1040,7277	1040,8107	0,0831	0,0001

Tabela 1.1: Convergência

Note que, à medida que  $h$  diminui, cada método obtém uma melhor aproximação. Além disso a cada valor menor de  $h$ , o método de Euler Aperfeiçoado nos fornece um melhor resultado. Isto está relacionado com a **ordem de convergência** do método.

**Definição 1.4** (Ordem de Convergência)

Considere a solução de uma equação diferencial no ponto  $t = t_i$  e a solução aproximada neste ponto  $w_i$ . Dizemos que a **ordem de convergência** é de ordem  $p$  se existir uma constante  $C$  tal que,

$$|y(t_i) - w_i| < Ch^p.$$

A **ordem de convergência**, é uma forma de indicar quantitativamente a rapidez que a solução numérica se aproxima da solução exata. A medida que  $h$  tende a zero, o termo  $O(h^p)$  tende a zero com a mesma rapidez que  $h^p$ .

Por exemplo o método de Euler é de ordem 1, ( $p = 1$ ) e o método de Euler Aperfeiçoado é de ordem 2, ( $p = 2$ ), (veja em [3] p. 239 e 246), assim o método de Euler Aperfeiçoado aproxima mais rápido a solução numérica da solução exata que o método de Euler, a partir de um certo  $h$ .

Vamos observar este fato novamente para um outro PVI.

**Exemplo 1.6** Vamos estimar  $y(1)$  pelo método de Euler e Euler Aperfeiçoado, com  $h = 0,2$  do PVI:

$$\begin{cases} y' &= 1 - t + 4y \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.11)$$

Do Método de Euler temos:

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + hf(t_i, w_i) \\ w_{i+1} &= w_i + 0,2(1 - t_i + 4w_i) \\ w_{i+1} &= 0,2 - 0,2t_i + 1,8w_i \end{aligned} \quad (1.12)$$

Do Método de Euler Aperfeiçoado temos:

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + \frac{h}{2}[f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))] \\ w_{i+1} &= w_i + \frac{0,2}{2}[1 - t_i + 4w_i + 1 - (t_i + 0,2) + 4(w_i + 0,2(1 - t_i + 4w_i))] \\ w_{i+1} &= 0,26 - 0,28t_i + 2,12w_i \end{aligned} \quad (1.13)$$

Substituindo  $w_i$  e  $t_i$  nas equações (1.12) e (1.13) e sabendo que a solução exata do PVI (1.11) é  $y(t) = \frac{1}{4}t - \frac{3}{16} + \frac{19}{16}e^{4t}$ , obtemos os valores da tabela 1.2.

$t_i$	<i>Euler</i>	<i>Euler Aperf.</i>	$y(t_i)$ exata
0	1	1	1
0,2	2	2,38	2,50533
0,4	3,76	5,2496	5,79423
0,6	6,888	11,277152	13,052522
0,8	12,4784	23,99956224	29,14487961
1,0	22,50112	50,91507195	64,89780316

Tabela 1.2: Comparação entre o método Euler e Euler Aperfeiçoado com  $h = 0,2$ .

Observe novamente o comportamento dos dois métodos, no qual o de ordem dois possui uma melhor aproximação da solução.

Voltando a questão da convergência vamos ver um exemplo no qual conseguimos mostrar a convergência usando a definição.

**Exemplo 1.7** Sendo o PVI do exemplo 1.4, mostre que o Método de Euler é convergente, pela definição de convergência.

$$\begin{cases} y' &= 0,04y \\ y(0) &= 1000 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.14)$$

Temos então:

$$\begin{aligned} w_i &= 1000(1 + 0,04h)^i \\ y(t) &= 1000e^{0,04t} \end{aligned}$$

Da definição de convergência temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} |w_i - y(t)| = 0; \quad \text{onde} \quad ih = t - a.$$

como  $a = 0$  temos  $t = ih$  ou seja  $i = \frac{t}{h}$ .

Calculando o  $\lim_{h \rightarrow 0} |w_i|$  chegamos a uma expressão envolvendo o segundo limite fundamental:

$$\lim_{h \rightarrow 0} |1000(1 + 0,04h)^i| = 1000 \left| \lim_{h \rightarrow 0} (1 + 0,04h)^{\frac{t}{h}} \right| = 1000 e^{0,04(t)}.$$

Como a solução do PVI (1.14) é  $y(t) = 1000 e^{0,04t}$  temos a convergência.

Note que neste exemplo para usar a definição de convergência tivemos que conhecer a solução exata do PVI e a solução da equação de diferença. Nem sempre isso é possível. Em geral é claro, não temos a solução exata nem a solução da equação de diferença. O teorema de equivalência de Lax, que veremos no capítulo II, nos fornece um meio de provar a convergência de outra forma.

Observe que até o momento nos exemplos foram utilizados métodos numéricos de passo simples. Assim antes de seguirmos para o capítulo II vamos ver algo sobre os métodos de passo múltiplo.

## 1.4 Métodos de Passo Múltiplo

Os métodos numéricos de passo simples, usam informações sobre a solução em um único ponto para calcular o próximo ponto. Já os métodos de passo múltiplo, usam informações sobre a solução em mais de um ponto.

A definição de convergência para métodos de passo múltiplos é similar a utilizada nos método de passo simples, a definição 1.3 .

Vejam os um exemplo utilizando um método de passo múltiplo, o **Método de Adams-Bashforth** ([3] p. 255).

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{24}[55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}] \quad (1.15)$$

onde,  $f_n = f(t_n, w_n)$ .

**Exemplo 1.8** Sendo o PVI do exemplo 1.4, estime  $y(1)$  usando o método de Adams-Bashforth com  $h = 0,2$ .

Com  $h = 0,2$  temos  $N = 5$ , assim para iniciarmos este método precisamos de quatro valores  $y(0), y(1), y(2)$  e  $y(3)$  que são os valores iniciais. Como conhecemos a solução deste PVI,  $y(t) = 1000 e^{0,04t}$ . Vamos usa-la substituindo o valor de  $t$ , encontraremos  $w_0, w_1, w_2$  e  $w_3$  para obter os valores na função  $f_n$  e, a partir de  $w_4$  usar a equação de diferença (1.15) assim:

$$w_4 = w_3 + \frac{h}{24}[55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0],$$

$$\begin{aligned} \text{segue} \quad w_4 &= 1032,517487, \\ \text{e} \quad f_4 &= 41,30069948. \\ \text{Assim} \quad w_5 &= 1040,810756. \end{aligned}$$

A tabela 1.3 mostra os valores encontrados neste processo.

$n$	$t_n$	$w_n$	$f_n = f(t_n, y_n)$
0	0,0	1000	40
1	0,2	1008,0321	40,32184
2	0,4	1016,1287	40,645148
3	0,6	1024,2903	40,971612
4	0,8	1032,517487	41,30069948
5	1,0	1040,810756	

Tabela 1.3: Aproximação pelo método de Adams-Bashforth.

Assim  $w_5$  é o valor aproximado para  $y(1)$ , e o erro máximo cometido foi de  $|y(1) - w_5| = 0,0000185$ .

**Observação:** Caso não tivéssemos a solução do PVI, poderíamos usar um método de passo simples para encontrar os valores iniciais. Mas neste caso os erros nos dados iniciais também afetarão a precisão da solução. Observe, utilizando o exemplo 1.8, vamos encontrar os valores iniciais  $w_0, \dots, w_3$  pelo método de Euler e, a partir de  $w_4$  usar a equação de diferença (1.15). Desta forma obtemos os valores da tabela 1.4.

$n$	$t_n$	$w_n$	$f_n = f(t_n, y_n)$
0	0,0	1000	40
1	0,2	1008	40,32
2	0,4	1016,064	40,64256
3	0,6	1024,192512	40,96770048
4	0,8	1032,418783	41,29675132
5	1,0	1040,711464	

Tabela 1.4: Aproximação pelo método de Adams-Bashforth

Note que o erro máximo cometido nesta aproximação foi de  $|y(1) - w_5| = 0,099315$ , tivemos um aumento no erro em relação a aproximação anterior de  $0,0992965$ . Observe a importância da escolha do método e seus parâmetros para definir os valores iniciais.

# Capítulo 2

## Estabilidade e Consistência

No capítulo I vimos o conceito de convergência e nesse capítulo estudaremos os conceitos de estabilidade e consistência.

O conceito de estabilidade é usado em diversos contextos e possui diferentes definições, embora todos estejam relacionados entre si. Por exemplo, em equações diferenciais ele quer dizer que pequenas alterações nos dados iniciais (e na própria equação) levam também a pequenas alterações na solução. Em métodos numéricos que a solução numérica aproximada fique limitada, a medida que avançamos no tempo. Ambas seguem a mesma idéia, mas uma envolve a variação no tamanho do passo e a outra no tempo.

Veremos estas noções com mais detalhes e o conceito de consistência que junto com o de estabilidade, resulta no Teorema de equivalência de Lax que faz a ligação entre eles.

### 2.1 Estabilidade das Equações Diferenciais

Em aplicações práticas, os dados registrados e a representação numérica no computador não são exatas. As variáveis utilizadas para representar as quantidades possuem uma pequena margem de erro. Além disso para uma equação diferencial, se por menor que sejam as perturbações nos dados resultarem em grandes modificações na solução, então nem mesmo a solução exata da equação diferencial será útil para

interpretar o fenômeno que se está estudando. O que dizer então do método numérico para obter uma solução aproximada?

Assim para começarmos a estudar as propriedades dos métodos, precisamos de equações diferenciais cujas soluções apresentem um comportamento razoável: a variação contínua da solução em relação aos dados iniciais é chamada de **estabilidade**. A existência e unicidade da solução com estabilidade se dá o nome de **problema bem posto**.

Vejam inicialmente a estabilidade para o seguinte caso: (como em [5](p. 337)).

Seja o seguinte PVI:

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Assumimos que existe solução e é única.

Considere agora o seguinte problema perturbado:

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) + \delta(t) \\ y(t_0) &= y_0 + \varepsilon \end{cases} \quad (2.2)$$

Sob certas condições sobre a função  $f$  e a perturbação  $\delta(t)$ , pode-se mostrar neste caso que

$$\max_{|t-t_0| \leq \alpha} |y(t) - y(t, \delta, \varepsilon)| \leq k[|\varepsilon| + \alpha \|\delta\|_\infty]$$

onde  $y(t)$  é a solução da equação (2.1),  $y(t, \delta, \varepsilon)$  é a solução da equação perturbada (2.2) e  $\alpha$  é o tamanho do intervalo de existência de  $y(t, \delta, \varepsilon)$  centrado em  $t_0$ .

Obs.:  $\|\delta\|_\infty = \max_{|t-t_0| \leq \alpha} |\delta(t)|$ .

Vejam um exemplo com perturbação apenas no dado inicial.

**Exemplo 2.1** Considere o seguinte PVI

$$\begin{cases} y' &= 1000y - 101e^{-t} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

cuja a solução exata é  $y(t) = e^{-t}$ . O problema perturbado é:

$$\begin{cases} y' &= 1000y - 101e^{-t} \\ y(0) &= 1 + \varepsilon \end{cases}$$

que tem como solução  $y(t, \varepsilon) = e^{-t} + \varepsilon e^{100t}$ .

Veja que a medida que  $\varepsilon \rightarrow 0, y(t, \varepsilon) \rightarrow y(t)$ .

**Definição 2.1** (Estabilidade)

O problema de valor inicial é estável se para cada número positivo  $t$  existe uma constante  $C_t$  tal que

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq C_t |y_1(0) - y_2(0)|$$

onde  $y_1(t)$  é solução com o dado inicial  $y_1(0)$ ,  $y_2(t)$  é solução com o dado inicial  $y_2(0)$  e  $C_t$  depende somente de  $t$ .

Neste caso somente se considera a perturbação nos dados iniciais e não nos termos da equação diferencial. Caso o problema seja linear então a condição para estabilidade fica:

$$|y(t)| \leq C_t |y(0)|$$

É interessante notar que caso a equação diferencial seja estável, ainda podemos ter problemas: um pequeno erro nos dados pode acarretar em um grande erro na solução, apesar que se diminuirmos o erro nos dados, o erro na solução também diminui. A isso damos o nome de mal-condicionamento. O exemplo (2.1) ilustra este fato. Mesmo que  $\varepsilon$  seja pequeno  $\varepsilon e^{100t}$  cresce rápido.

## 2.2 Estabilidade dos Métodos Numéricos

A estabilidade para os métodos numéricos segue a mesma idéia de estabilidade de equações diferenciais, em que pequenas alterações nos dados iniciais levam a pequenas alterações na solução numérica. Assim temos a seguinte definição.

**Definição 2.2** (Estabilidade para Métodos Numéricos)

Seja  $w_{n_1}$  onde  $n = 0, \dots, N$ , que satisfaz a equação de diferença de um método numérico aplicado ao PVI

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= \alpha_1, \quad 0 \leq t \leq b \end{cases}$$

Seja também  $w_{n_2}$  que satisfaz a equação de diferença do mesmo PVI com  $y(t_0) = \alpha_2$ . Dizemos que o método é estável se existir  $K > 0$  tal que:

$$|w_{n_1} - w_{n_2}| \leq K |w_{0_1} - w_{0_2}|$$

onde  $w_{0_1} = \alpha_1$ ,  $w_{0_2} = \alpha_2$ ,  $0 \leq ih \leq b$  e  $K$  depende apenas de  $b$ .

Uma observação importante aqui é que esta é a definição para estabilidade do método que é utilizado no teorema de equivalência de Lax. O tempo  $b$  está fixo enquanto  $h$  e  $n$  podem variar. No entanto a palavra estabilidade também será usada para definir o comportamento do método numérico para um  $h$  fixo e  $n$  crescente. Veremos este outro conceito de estabilidade, também chamada de **estabilidade dinâmica** ([11] p. 59) no capítulo III.

## 2.3 Consistência

Vimos no capítulo anterior que diminuindo o tamanho do passo, o  $w_i$  estará cada vez mais próxima da solução exata. Uma outra pergunta que poderíamos fazer, uma vez que calculamos uma solução aproximada, é o quanto ela está satisfazendo a equação diferencial. Mas aqui temos uma dificuldade. Calculamos a solução aproximada em determinados pontos, ou seja, temos uma tabela de valores e não a função em todos os pontos. Assim não temos como “colocar” a solução numérica na equação contínua.

Por outro lado, se soubéssemos a solução, em todos os pontos, poderíamos verificar o quanto ela satisfaz a equação de diferença. Ou seja, qual o erro resultante quando substituímos a solução exata no esquema numérico. E quando o passo tende a zero, se este erro também tende a zero.

Uma definição possível é a seguinte:

**Definição 2.3** (Erro de Truncamento Local )

*Seja o método numérico de passo simples,*

$$\begin{aligned}w_0 &= \alpha \\w_{i+1} &= w_i + h\phi(t_i, w_i) \quad \text{para } i = 0, \dots, N - 1\end{aligned}$$

*O erro de truncamento local para este método é dado por:*

$$\mathcal{T}_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(t_i, y_i), \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, N - 1$$

onde  $y_i = y(t_i)$  denota o valor da solução em  $t_i$ .

Vamos no próximo exemplo, analisar o erro de truncamento local.

**Exemplo 2.2** Sendo o PVI do exemplo 1.4, verifique o erro de truncamento local com  $h = 0,5$ ,  $h = 0,2$  e  $h = 0,1$  na aproximação de  $y(1)$  pelo método de Euler.

Sabemos que a solução deste PVI é  $y_i = y(t_i) = 1000.e^{0,04t_i}$ . Substituindo os valores de  $t_i$  para  $h = 0,5$ ,  $h = 0,2$  e  $h = 0,1$  obtemos os valores da tabela 2.1.

$i$	$t_i$	$y(t_i)$
0	0	1000
1	0,1	1004,008011
2	0,2	1008,032086
3	0,3	1012,072289
4	0,4	1016,128685
5	0,5	1020,20134
6	0,6	1024,290318
7	0,7	1028,395684
8	0,8	1032,517505
9	0,9	1036,655846
10	1	1040,810774

Tabela 2.1: Soluções exatas

Da definição do Erro de Truncamento Local temos:

$$\mathcal{T}_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(t_i, y_i), \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, N - 1$$

ou seja

$$\mathcal{T}_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - 0,04y_i. \quad (2.3)$$

Substituindo os valores da tabela 2.1 onde  $y_i = y(t_i)$  na equação (2.3) e variando o tamanho do passo temos:

$t_i$	$\mathcal{T}_{i+1}(0, 1)$	$\mathcal{T}_{i+1}(0, 2)$	$\mathcal{T}_{i+1}(0, 5)$
0	0,080107	0,160428	0,40268
0,1	0,080428	0,1610705	0,404294
0,2	0,080750	0,161716	0,405914
0,3	0,081074	0,1623642	0,407541
0,4	0,081399	0,163015	0,409175
0,5	0,081725	0,1636684	0,410815
0,6	0,082053	0,164324	
0,7	0,082381	0,164983	
0,8	0,082712	0,165644	
0,9	0,083043		

Tabela 2.2: Erro de Truncamento Local

Observe na tabela 2.2 que em todos os pontos o erro de truncamento local diminui com o tamanho do passo, e possui uma variação conforme o ponto. Os espaços em branco na tabela são referentes aos valores que estão fora do intervalo do PVI.

Será que este comportamento prossegue?

Isso sugere a seguinte definição.

**Definição 2.4** (Consistência)

Um método numérico de passo simples, com erro de truncamento local  $\mathcal{T}_{i+1}(h)$ , é dito **consistente** se, para qualquer  $t \in (a, b]$

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\mathcal{T}_{i+1}(h)| = 0, \quad \text{onde} \quad t_i = t.$$

Ou seja, quando o erro de truncamento local aproxima-se de zero em todos os passos, quando o tamanho do passo tende a zero, dizemos que o método é **consistente**.

Mas em geral não conhecemos a solução. Então como calcular o erro de truncamento local e por conseqüência provar que o método é consistente? Vamos ver a seguir que mesmo não tendo a solução exata podemos **estimar** o erro de truncamento local, e usar esta estimativa para provar que o método é consistente. Vamos utilizar a **Série de Taylor**, ([11] p. 8).

Considere que a solução seja derivável até a ordem  $n + 1$ . Efetuando a expansão de  $y$  em Série de Taylor até a ordem  $n$  em torno do ponto  $t = t_i$  obtemos a solução em  $t_{i+1} = t_i + h$ :

$$y(t_i + h) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2!}y''(t_i) + \cdots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(t_i) + \mathcal{E}_i(h) \quad (2.4)$$

$$\text{onde} \quad \mathcal{E}_i(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi) \quad \text{para} \quad t_i < \xi < t_i + h$$

Vamos usar esta expansão para mostrar a consistência do método de Euler.

**Exemplo 2.3** *Sendo o PVI do exemplo 1.4, verifique a consistência do método de Euler.*

Da definição do erro de truncamento local para o método de Euler temos:

$$\mathcal{T}_{i+1}(h) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - f(t_i, y_i).$$

Substituindo  $y_{i+1}$  por  $y(t_i+h)$  da equação (2.4) truncando a série no segundo termo, e  $y_i$  por  $y(t_i)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{i+1}(h) &= \frac{y(t_i) + hy'(t_i) - y(t_i)}{h} - f(t_i, y_i), \\ \text{ou seja} \quad \mathcal{T}_{i+1}(h) &= \frac{y(t_i) + hf(t_i, y_i) - y(t_i)}{h} - f(t_i, y_i). \end{aligned}$$

$$\text{Assim} \quad \lim_{h \rightarrow 0} |\mathcal{T}_{i+1}(h)| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{y(t_i) + hf(t_i, y_i) - y(t_i)}{h} - f(t_i, y_i) \right| = 0.$$

Vimos nesta seção a definição do erro de truncamento local e consistência em métodos de passo simples. Vejamos agora estas definições em métodos de passo múltiplo.

## 2.4 Consistência em Métodos de Passo Múltiplo

Nos métodos de passo múltiplo, a aproximação da solução do problema de valor inicial,

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= \alpha, \quad a \leq t \leq b \end{cases}$$

pode ser escrita da seguinte forma:

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \dots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1} \quad (\text{dados iniciais})$$

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \dots + a_0w_{i+1-m} + hf(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \dots, w_{i+1-m})$$

para  $i = m - 1, m, \dots, N - 1$ , onde  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ , são constantes.

O erro de truncamento local para este caso, pode ser definido por:

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - a_{m-1}y(t_i) - \dots - a_0y(t_{i+1-m})}{h} - f(t_i, h, y(t_{i+1}), y(t_i), \dots, y(t_{i+1-m})),$$

para  $i = m - 1, m, \dots, N - 1$ .

Já sabemos que para um método ser consistente, o erro de truncamento local deve aproximar-se de zero, quando o passo tende a zero. Como os métodos de passo múltiplo exigem mais de um dado inicial e normalmente, somente o primeiro valor inicial  $w_0 = \alpha$  é exato, se faz necessário que o erro nos demais valores iniciais  $\{\alpha_i\}$  aproximem-se de zero, quando o tamanho do passo tende a zero.

Portanto, para definir consistência em métodos de passo múltiplo temos que levar em conta dois aspectos, o erro de truncamento local e a convergência dos valores iniciais.

**Definição 2.5** (Consistência em Métodos de Passo Múltiplo)

Um método numérico de passo múltiplo, com erro de truncamento local  $\mathcal{T}_{i+1}(h)$ , é dito **consistente** quando:

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\mathcal{T}_{i+1}(h)| = 0, \quad \text{para } i = m, m + 1, \dots, N - 1 \text{ e}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\alpha_i - y(t_i)| = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m - 1.$$

Vamos no próximo exemplo, analisar o erro de truncamento local em métodos de passo múltiplo.

**Exemplo 2.4** Sendo o PVI do exemplo 1.4, verifique o erro de truncamento local com  $h = 0,2$  e  $h = 0,1$  na aproximação de  $y(1)$  pelo método de Adams-Bashforth .

Sabemos que a solução deste PVI é  $y_i = y(t_i) = 1000e^{0,04t_i}$ . Substituindo o valor de  $t_i$ , encontraremos  $y(t_0), y(t_1), y(t_2)$  e  $y(t_3)$ , ver valores na tabela 2.1.

Do método de Adams-Bashforth temos:

$$w_{n+1} = w_n + \frac{h}{24}[55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}]$$

Da definição do Erro de Truncamento Local temos:

$$\begin{aligned} \tau_{i+1}(h) &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{1}{24}[55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}], \quad \text{ou seja} \quad (2.5) \\ \tau_{i+1}(h) &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{1}{24}[55 \cdot 0,04y_i - 59 \cdot 0,04y_{i-1} + 37 \cdot 0,04y_{i-2} - 9 \cdot 0,04y_{i-3}]. \end{aligned}$$

Substituindo os valores da tabela 2.1 na equação (2.5), com  $h = 0,2$  e  $h = 0,1$  obtemos:

$t_i$	$\mathcal{T}_{i+1}(0,1)$	$\mathcal{T}_{i+1}(0,2)$
0,3	$3,59789 \cdot 10^{-10}$	$5,801238 \cdot 10^{-8}$
0,4	$3,61174 \cdot 10^{-10}$	$5,824545 \cdot 10^{-8}$
0,5	$3,62628 \cdot 10^{-10}$	$5,847998 \cdot 10^{-8}$
0,6	$3,64221 \cdot 10^{-10}$	
0,7	$3,65286 \cdot 10^{-10}$	
0,8	$3,67258 \cdot 10^{-10}$	
0,9	$3,68433 \cdot 10^{-10}$	

Tabela 2.3: Erro de Truncamento Local

Da mesma forma que vimos no exemplo 2.2, o erro de truncamento local diminui com o tamanho do passo e possui uma variação conforme o ponto. Os espaços em branco são referentes aos valores que estão fora do intervalo do PVI.

## 2.5 Teorema de Lax

Antes de enunciar o teorema de equivalência de Lax, vejamos o seguinte resultado para um caso mais particular. O seguinte teorema (que aparece em [11]) nos dá garantias sobre a estabilidade, convergência e consistência dos métodos numéricos.

**Teorema 2.1** (Estabilidade Numérica)

*Dado o PVI:*

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(a) &= \alpha \end{cases} \quad a \leq t \leq b \quad (2.6)$$

*E um método numérico de passo simples, na forma:*

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha \\ w_{i+1} &= w_i + h\phi(t_i, w_i, h). \end{aligned} \quad (2.7)$$

*Vamos supor que  $h_0 > 0$  e existe  $\phi(t, w, h)$  contínua que satisfaz a Condição de Lipschitz na variável  $w$ , com a constante de Lipschitz  $L$  do conjunto  $D = \{(t, w, h) | a \leq t \leq b, -\infty < w < \infty\}$ , então:*

*i. O método é estável.*

*ii. O método é convergente se e somente se é consistente, ou seja, se e somente se,*

$$\phi(t, y, 0) = f(t, y) \quad \text{para todo } a \leq t \leq b.$$

*iii. Se para cada  $i = 1, 2, \dots, N$ , o erro de truncamento local  $\mathcal{T}_{i+1}(h)$  satisfaz  $|\mathcal{T}_{i+1}(h)| \leq \mathcal{T}(h)$ , quando  $0 \leq h \leq h_0$  então,*

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{\mathcal{T}(h)}{L} e^{t_i - a}$$

*com  $\mathcal{T}(h) = \text{Max } \mathcal{T}_{i+1}(h)$  com  $i = 0, \dots, N - 1$*

A demonstração do teorema 2.1 pode ser vista em [4].

Vamos verificar os itens *i* e *ii* para o método de Euler.

Para  $i$ , vamos verificar se o método de Euler aplicado ao PVI (2.6) é estável.

Sejam  $w_{n_1+1}$  a solução aproximada do método de Euler com o dado inicial  $w_{0_1}$  e  $w_{n_2+1}$  a solução aproximada do método de Euler com o dado inicial  $w_{0_2}$ :

$$\begin{aligned} w_{n_1+1} &= w_{n_1} + hf(t_i, w_{n_1}), & e \\ w_{n_2+1} &= w_{n_2} + hf(t_i, w_{n_2}). \end{aligned}$$

Verificando o erro absoluto temos:

$$\begin{aligned} |w_{n_1+1} - w_{n_2+1}| &= |w_{n_1} - w_{n_2} + h(f(t_i, w_{n_1}) - f(t_i, w_{n_2}))| \leq |w_{n_1} - w_{n_2}| + h|f(t_i, w_{n_1}) - \\ &f(t_i, w_{n_2})| \leq |w_{n_1} - w_{n_2}| + hL|w_{n_1} - w_{n_2}| = (1 + hL)|w_{n_1} - w_{n_2}|. \end{aligned}$$

ou seja

$$|w_{n_1+1} - w_{n_2+1}| \leq (1 + hL)|w_{n_1} - w_{n_2}|$$

assim para  $n$  termos obtemos,

$$|w_{n_1} - w_{n_2}| \leq (1 + hL)^n |w_{0_1} - w_{0_2}|$$

Vamos limitar  $(1 + hL)^n$  por uma constante. Como  $h > 0$  esta expressão fica limitada em  $e^{Lt}$ . Assim obtemos uma constante  $K$  onde  $K \geq e^{Lt}$  então:

$$|w_{n_1} - w_{n_2}| \leq K|w_{0_1} - w_{0_2}|$$

Desta forma o método de Euler é estável para o PVI (2.6).

Para  $ii$ , vamos verificar se o método de Euler aplicado ao PVI (2.6) é convergente.

Da definição de consistência temos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\mathcal{T}_{i+1}(h)| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \phi(t_i, y_i) \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \right| - \lim_{h \rightarrow 0} |\phi(t_i, y_i)| = 0.$$

$$\text{Como} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \right| = y' = f(t, y),$$

$$\text{temos} \quad f(t, y) - \phi(t_i, y_i) = 0$$

$$\text{ou seja} \quad f(t, y) = \phi(t_i, y_i).$$

Portanto para verificar se um método é convergente, basta verificar se é consistente.

**Teorema 2.2** (Teorema de Equivalência de Lax)

*Um método numérico consistente para uma equação diferencial cujo PVI é bem posto é convergente se e somente se é estável.*

A prova deste teorema pode ser vista em [10] capítulo 10.

Este teorema é bastante útil pois basta verificar a consistência e estabilidade para obtermos a convergência. Lembrando da dificuldade em provar a convergência diretamente pela definição (seção 1.3 exemplo 1.7).

Também é interessante ver que este teorema é de equivalência, ou seja, se queremos que um método seja convergente ele necessariamente deve ser consistente e estável.

# Capítulo 3

## Regiões de Estabilidade

No capítulo anterior vimos três conceitos importantes na análise dos métodos numéricos: convergência, consistência e estabilidade. O que se deseja a princípio é que o método seja convergente, e pelo teorema de equivalência de Lax é necessário que seja consistente e estável.

Uma vez que o método seja consistente e estável podemos então aplicá-lo. Neste momento precisamos definir o tamanho do passo da variável independente,  $h$ . Qual  $h$  usaremos? Quanto menor for  $h$ , mais cálculo precisamos fazer, ou seja o tempo de computação será maior. Por outro lado quanto maior  $h$ , a princípio, menor será a precisão da solução. Então devemos usar o menor  $h$  que nos dá uma precisão dentro de limites desejados.

Ou seja, queremos escolher um  $h$  tal que a solução aproximada se comporte, pelo menos, de forma parecida com a solução exata. Isto nos leva ao conceito de região de estabilidade, onde agora a palavra estabilidade se refere ao comportamento da solução numérica para um certo  $h$  escolhido.

A escolha do passo se torna crítica quando estamos tratando com equações diferenciais de um certo tipo, que chamamos de equações “stiff”. Assim iniciamos este capítulo estudando este tipo de equações que motiva a definição de região de estabilidade.

### 3.1 Equações “Stiff”

Encontramos dificuldades para aproximar algumas soluções, quando a solução exata possui termos na forma  $e^{\lambda t}$ , onde  $\lambda$  é um número complexo com parte real negativa. As equações diferenciais cujas soluções apresentam estes termos são chamadas de “**Stiff**” (rígida).

Em geral o termo equação diferencial “stiff” é empregado para sistemas de equações no qual diversas componentes operam em escalas de tempo bastante diferente, e que causam dificuldades à resolução numérica. Estudaremos aqui este assunto em um nível mais simples com apenas uma equação. Para explicar este tipo de equações vamos fazê-lo através de um exemplo.

Considere o seguinte PVI.

$$\begin{cases} y' &= -20y + 20\text{sent} + \text{cost} \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

cuja solução é  $y(t) = \text{sent} + e^{-20t}$ . Observe que neste exemplo  $\lambda$  é um número real negativo.

Note que o segundo termos desta solução tende para zero quando  $t$  cresce, e o primeiro termo oscila lentamente. Por exemplo, para  $t = 1$  o primeiro termo tem como solução 0,01745, enquanto o segundo termo é igual a zero quando arredondado para quatro casas decimais.

O segundo termo é na verdade um termo **transitório** quando comparado com o primeiro, que pode ser chamado de **estado estacionário** ou **permanente**.

Isto induz a seguinte definição.

**Definição 3.1** (Equação “Stiff”)

*As equações diferenciais que possuem na solução exata termos transitórios que decrescem rapidamente, com o crescimento de  $t$ , são chamadas de **Equação “Stiff”**.*

Apesar de que a solução permanente não depende do termo transitório, a precisão da solução numérica produzida por um método pode depender e muito. Assim uma maneira de avaliar o erro produzido pelo termo transitório é aplicar o método a

uma equação cujo termo transitório seja sua solução. A esta equação, chamamos de **equação teste**.

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = \alpha. \quad (3.1)$$

Vejamos um exemplo.

**Exemplo 3.1** *Considere o método de Euler aplicado a equação teste.*

Aplicando o método de Euler na equação teste (3.1) temos:

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i + hf(t_i, w_i) \\ w_{i+1} &= w_i + h(\lambda w_i) = w_i(1 + h\lambda) \end{aligned}$$

Note que, para  $i = 0$  temos:

$$w_1 = w_0(1 + h\lambda) = \alpha(1 + h\lambda)$$

Para  $i = 1$ , temos:

$$w_2 = w_1(1 + h\lambda) = w_0(1 + h\lambda)(1 + h\lambda) = \alpha(1 + h\lambda)^2$$

Prosseguindo deste modo até  $i = N - 1$ , temos:

$$w_j = \alpha(1 + h\lambda)^j \quad \text{para } j = 1, \dots, N.$$

Observe que, para obter o próximo passo, multiplicamos o dado inicial por  $n$  fatores de uma determinada função que depende de  $h\lambda$ .

Sabemos que a solução exata da equação teste é  $y(t) = \alpha e^{\lambda t}$ . Assim, no passo  $t_j$  teremos  $y(t_j) = \alpha e^{\lambda t_j}$  com  $t_j = hj$  segue:

$$y(t_j) = y(hj) = \alpha e^{\lambda hj}$$

Verificando o erro absoluto cometido no método de Euler temos:

$$|y(t_j) - w_j| = |\alpha e^{\lambda hj} - \alpha(1 + h\lambda)^j| = |\alpha(e^{\lambda hj} - (1 + h\lambda)^j)| = |\alpha| |e^{\lambda hj} - (1 + h\lambda)^j|$$

Como  $\lambda < 0$ , o termo  $e^{\lambda hj}$  aproxima-se de zero, então o erro absoluto se aproximara de zero se o termo  $(1 + h\lambda)^j$  se aproximar de zero. E para isto é necessário

que  $|1 + h\lambda| < 1$ . Vamos adotar esta condição para restringir o tamanho do passo  $h$  no método de Euler. Observe:

Impondo  $|1 + h\lambda| < 1$ .

Pela desigualdade triangular segue:

$$|h\lambda| - |1| < |1 + h\lambda|.$$

Como  $|1 + h\lambda| < 1$ ,

temos  $|h\lambda| - |1| < 1$ ,

ou seja  $|h\lambda| < 2$ .

Como  $h > 0$ , temos  $h|\lambda| < 2$ ,

ou seja  $h < \frac{2}{|\lambda|}$ .

Esta condição nos dá uma relação entre  $h$  e  $\lambda$ , que é uma maneira de analisar a estabilidade para o método de Euler. Se  $|\lambda|$  for muito grande  $h$  deverá ser muito pequeno. Assim o termo transitório, apesar de não interferir na solução permanente limita o tamanho do passo apenas por questão de estabilidade.

Na próxima seção veremos outra origem de problemas numéricos relacionados a soluções tipo  $e^{\lambda t}$  e a condição para estabilidade de métodos de passo simples.

## 3.2 Erro de Arredondamento e Estabilidade

Neste trabalho não foi levado em conta os erro de arredondamentos cometido durante os cálculos. Embora saibamos que a partir de um determinado valor de  $h$ , quando  $h$  decresce, o erro de truncamento diminui e por outro lado o erro de arredondamento aumenta, desta forma o erro global pode vir a crescer.

Suponhamos que um erro de arredondamento  $\delta_0$ , é introduzido na condição inicial do método de Euler.

$$w_0 = \alpha + \delta_0$$

Em um  $j$ -ésimo passo temos:

$$w_j = w_0(1 + h\lambda)^j = (\alpha + \delta_0)(1 + h\lambda)^j = \alpha(1 + h\lambda)^j + \delta_0(1 + h\lambda)^j = \alpha(1 + h\lambda)^j + \delta_j,$$

onde  $\delta_j = \delta_0(1 + h\lambda)^j$ , que é o erro de arredondamento no  $j$ -ésimo passo.

Deste que  $\lambda < 0$ , a condição para o controle do crescimento do erro de arredondamento é a mesma para o controle do erro absoluto. As condições que encontramos para o método de Euler, são encontradas de forma semelhante para os demais métodos de Runge-Kutta.

Em geral nos métodos de passo simples, existe uma função  $Q(h\lambda)$ , tal que quando aplicamos o método a equação teste, obtemos:

$$w_{i+1} = Q(h\lambda)w_i.$$

A precisão do método depende de como  $Q(h\lambda)$  aproxima-se de  $e^{h\lambda}$  e o erro é tolerável desde que  $|Q(h\lambda)| \leq 1$ . Esta será a condição de estabilidade para métodos de passo simples.

Vejamos agora a estabilidade para o caso do métodos de passo múltiplo.

### 3.3 Estabilidade em Métodos de Passo Múltiplo

Antes de discutirmos a estabilidade para os métodos de passo múltiplo, necessitamos de mais alguns conceitos.

Dado um PVI:

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(t_0) &= \alpha, \quad a \leq t \leq b \end{cases}$$

Nos métodos de passo múltiplo, a aproximação da solução de um PVI, pode ser escrita da seguinte forma:

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \dots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1} \quad (\text{dados iniciais})$$

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \dots + a_0w_{i+1-m} + hf(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \dots, w_{i+1-m}) \quad (3.2)$$

para  $i = m - 1, m, \dots, N - 1$ , onde  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ , são constantes.

Considere o seguinte PVI, aplicando o método de passo múltiplo da equação(3.2).

$$\begin{cases} y' &= 0 \\ y(a) &= \alpha, \quad a \leq t \leq b \end{cases} \quad (3.3)$$

Observe que a solução exata é  $y(t) = \alpha$ , assim a aproximação para este PVI é a solução exata  $w_n = \alpha$  para todo  $n$ .

Note que,  $f(t, y) = 0$  assim na equação (3.2) temos:

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \dots + a_0w_{i+1-m} \quad (3.4)$$

ou seja

$$w_{i+1} - a_{m-1}w_i - a_{m-2}w_{i-1} - \dots - a_0w_{i+1-m} = 0$$

Seja  $\lambda$  uma raiz da equação característica associada a equação (3.2). Substituindo  $w_n = \lambda^n$  em (3.4) temos:

$$\lambda^{i+1} - a_{m-1}\lambda^i - a_{m-2}\lambda^{i-1} - \dots - a_0\lambda^{i+1-m} = 0 \quad (3.5)$$

ou seja

$$\lambda^{i+1-m}[\lambda^m - a_{m-1}\lambda^i - a_{m-2}\lambda^{i-1} - \dots - a_0] = 0$$

A equação (3.5) é chamada de **Polinômio Característico**, onde  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  são raízes distintas deste polinômio para a equação (3.2).

Note que consideramos somente o caso especial de aproximação para PVI da forma (3.3). Sendo que as características de estabilidade desta equação, determina a situação de estabilidade quando  $f(t, y)$  é diferente de zero. Isto ocorre devido ao fato de que a solução para a equação (3.3) esta sempre presente na solução de qualquer equação diferencial.

Para verificar a estabilidade dos métodos de passo múltiplo precisamos das seguintes definições.

**Definição 3.2** Condição da Raiz

*Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  raízes (não necessariamente distintas) do polinômio característico associado a equação (3.2),*

$$P(\lambda) = \lambda^{i+1} - a_{m-1}\lambda^i - a_{m-2}\lambda^{i-1} - \dots - a_0\lambda^{i+1-m} = 0$$

*dizemos que o método satisfaz a condição da raiz, se  $|\lambda_i| \leq 1$ , para  $i = 1, 2, \dots, m$ .*

**Definição 3.3** Estabilidade dos Métodos de Passo Múltiplo

- i. O método que satisfaz a condição da raiz e tem  $\lambda = 1$ , com multiplicidade um, são chamados fortemente estáveis.*
- ii. O método que satisfaz a condição da raiz e tem mais de uma raiz distinta com multiplicidade um, são chamados fracamente estáveis.*
- iii. O método que não satisfaz a condição da raiz é chamado instável.*

O seguinte teorema nos dá garantias sobre a estabilidade, convergência e consistência dos métodos numéricos de passo múltiplo.

**Teorema 3.1** Estabilidade Numérica

*Os métodos de passo múltiplo, na forma da equação (3.2), são estáveis se, e somente se, ele satisfaz a condição da raiz. Além disso, se o método é consistente, então é estável se, e somente se, é convergente.*

A demonstração do teorema 3.1 pode ser vista em [7].

Note que para este teorema, basta verificar a condição da raiz e saberemos se o método é estável e convergente. Vejamos agora, o que acontece com um método de passo múltiplo aplicado a equação teste.

Da equação teste temos:

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = \alpha.$$

Do método de passo múltiplo temos:

$$w_0 = \alpha, \quad w_1 = \alpha_1, \quad \dots, \quad w_{m-1} = \alpha_{m-1} \quad (\text{dados iniciais})$$

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \dots + a_0w_{i+1-m} + hf(t_i, h, w_{i+1}, w_i, \dots, w_{i+1-m})$$

para  $i = m - 1, m, \dots, N - 1$ , onde  $a_0, a_1, \dots, a_{m+1}$ , são constantes.

Aplicando o método a equação teste temos:

$$w_{j+1} = a_{m-1}w_j + \dots + a_0w_{j+1-m} + h\lambda(b_mw_{j+1} + b_{m-1}w_j + \dots + b_0w_{j+1-m})$$

para  $j = m - 1, \dots, N - 1$  ou seja

$$(1 - h\lambda b_m)w_{j+1} - (a_{m-1} + h\lambda b_{m-1})w_j - \dots - (a_0 + h\lambda b_0) = 0. \quad (3.6)$$

Note que, associado a equação (3.6) está o polinômio característico:

$$Q(z, h\lambda) = (1 - h\lambda b_m)z^m - (a_{m-1} + h\lambda b_{m-1})z^{m-1} - \dots - (a_0 + h\lambda b_0).$$

Que é o mesmo polinômio característico definido anteriormente, mas agora inserido na equação teste.

Suponha que  $w_0, \dots, w_{m-1}$  são dados para um fixo  $h\lambda$ , que permite  $\beta_1, \dots, \beta_m$  como zeros do polinômio característico  $Q(z, h\lambda)$ .

Se  $\beta_1, \dots, \beta_m$  são distintas, então existe as constantes  $c_1, \dots, c_m$  com:

$$w_j = \sum_{k=1}^m c_k (\beta_k)^j \quad \text{para } j = 0, \dots, N.$$

Se  $Q(z, h\lambda)$  possui múltiplas raízes, a definição de estabilidade para passo múltiplo é mesma definida em 3.3 . Mas se  $w_j$  aproxima-se da  $y(t_j) = y(t_{jh}) = e^{\lambda h j}$ , então as raízes do polinômio satisfazem  $|\beta_k| < 1$ . Como a estabilidade depende das raízes do polinômio característico, que por sua vez, depende de  $h\lambda$ . Dizemos que  $|\beta_k| < 1$  é a condição de estabilidade para métodos de passo múltiplo.

Com as condições obtidas nesta seção podemos iniciar nosso estudo sobre as regiões de estabilidade.

### 3.4 Região de Estabilidade Absoluta

Vimos que  $|Q(h\lambda)| < 1$  e  $|\beta_k| < 1$  são condições de estabilidade para os métodos numéricos aplicados na equação teste. Com base nestas condições, definiremos a **Região de Estabilidade Absoluta**.

**Definição 3.4** (Regiões de Estabilidade Absoluta)

*Regiões de Estabilidade absoluta, para métodos de passo simples são definidas por,  $R = \{h\lambda \in \mathbb{C} / |Q(h\lambda)| < 1\}$  e para métodos de passo múltiplo por,  $R = \{h\lambda \in \mathbb{C} / |\beta_k| < 1, \text{ para toda raiz } \beta_k \in Q(z, h\lambda)\}$ .*

A região de estabilidade absoluta é o conjunto de pontos  $\lambda h \in \mathbb{C}$  para os quais a solução numérica apresenta um comportamento estável. Quanto maior for a região de estabilidade absoluta, menor será a restrição quanto ao tamanho de  $h$ .

Vamos chamar um método numérico de **A-estável** se a região de estabilidade absoluta conter totalmente o meio plano esquerdo,  $\{h\lambda \in \mathbb{C} / \text{Re}(h\lambda) < 0\}$ .

Vejam agora, a região de estabilidade absoluta para os métodos de passo simples. Os métodos que usaremos a seguir são os métodos de Runge-Kutta até a 4ª ordem. Utilizaremos o procedimento do exemplo 3.1. Aplicamos os métodos a equação teste e obtemos as seguintes funções onde  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

Método de Euler,  $Q(h\lambda) = 1 + h\lambda$ .

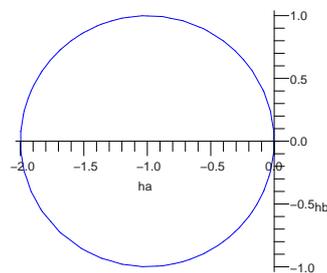


Figura 3.1: Região de estabilidade do método de Euler.

onde o eixo horizontal  $ha$  representa a parte real de  $h\lambda$  e o eixo vertical  $hb$  a parte imaginária de  $h\lambda$ .

Método de Euler Aperfeiçoado,  $F(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!}$ .

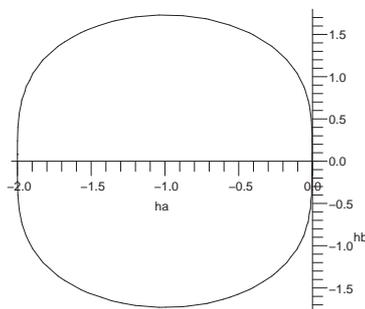


Figura 3.2: Região de estabilidade do método de RK de segunda ordem.

Observe nas figuras 3.1 e 3.2 que a região de estabilidade absoluta são limitadas por  $-2 < h\lambda < 0$ , no eixo real, mas o método de Euler Aperfeiçoado apresenta uma região maior.

Método de Runge-Kutta de 3ª ordem,  $G(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!}$ .

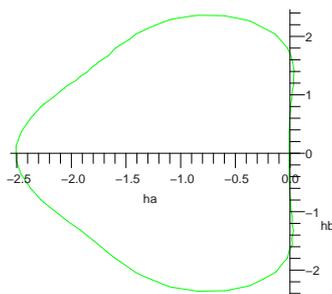


Figura 3.3: Região de estabilidade do método de RK de terceira ordem.

Método de Runge-Kutta de 4ª ordem,  $H(h\lambda) = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!}$ .

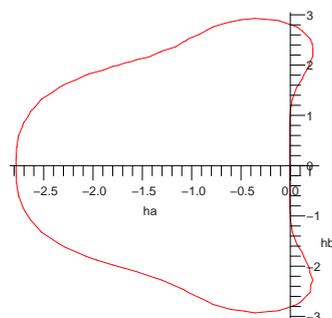


Figura 3.4: Região de estabilidade do método de RK de quarta ordem.

Note que a região de estabilidade absoluta da figura 3.3 está limitada no eixo real por  $-2,51 < h\lambda < 0$  e no eixo imaginário por  $-\sqrt{3} < h\lambda < \sqrt{3}$ , com  $h\lambda \neq 0$ . Já na figura 3.4 a região esta limitada por  $2,79 < h\lambda < 0$  no eixo real, e no eixo imaginário por  $-2\sqrt{2} < h\lambda < 2\sqrt{2}$ , com  $h\lambda \neq 0$ .

Observe que a condição de estabilidade destas regiões exige que  $\lambda < 0$ , mas como mostra as figuras 3.3 e 3.4, temos uma pequena região onde  $\lambda > 0$ . Isto é uma boa característica relacionada ao erro de arredondamento, pois mesmo que o método leve um  $\lambda > 0$  devido ao erro de arredondamento, esta condição manterá ainda a estabilidade do método.

Vejamos agora as quatro regiões de estabilidade absoluta do método de Runge-Kutta em um mesmo plano, onde podemos ter uma noção do tamanho de cada região em relação a ordem. Observe que a região aumenta a medida que a ordem do método cresce.

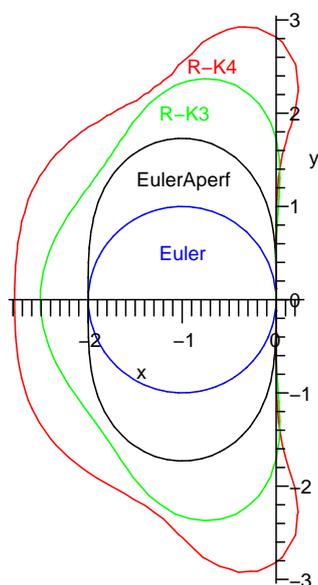


Figura 3.5: Regiões de estabilidade dos métodos RK.

Observe que o método de Runge-Kutta de 4ª ordem possui a maior região de estabilidade absoluta e engloba os demais métodos. Desta forma podemos dizer, por exemplo, se aplicarmos o método de Euler a uma EDO, e esta for estável, ela também será estável nos demais métodos. Já o contrário, não podemos afirmar.

Vejamos agora, a região de estabilidade absoluta para os métodos de passo múltiplo.

### 3.5 Regiões de Estabilidade Absoluta para Métodos de Passo Múltiplo

Os métodos que usaremos a seguir são os métodos de Adams-Bashforth de 2ª e 3ª ordem. Aplicamos os métodos a equação teste e obtemos as seguintes funções:

$$\text{Adams-Bashforth de 2ª ordem, } Q(z, h\lambda) = z^2 - \left(1 + \frac{3h\lambda}{2}\right)z + \frac{h\lambda}{2} .$$

A condição estabilidade para o método é  $|\beta_k| < 1$ , onde  $\beta_k \in Q(z, h\lambda)$ .

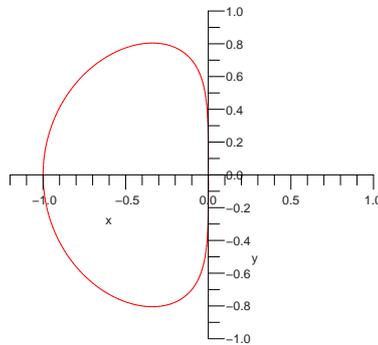


Figura 3.6: Região de estabilidade do método de AB de segunda ordem.

$$\text{Adams-Bashforth de 3ª ordem, } Q(z, h\lambda) = z^3 - \left(1 + \frac{23h\lambda}{12}\right)z^2 + \frac{16h\lambda}{12}z - \frac{5h\lambda}{12} .$$

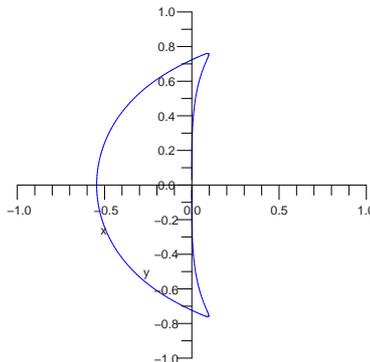


Figura 3.7: Região de estabilidade do método de AB de terceira ordem.

Note que aqui também temos uma pequena região onde  $\lambda > 0$ . Vejamos

agora estas regiões em um mesmo plano, onde podemos ter uma noção do tamanho de cada região em relação a ordem. Observe que a região diminui a medida que a ordem do método cresce.

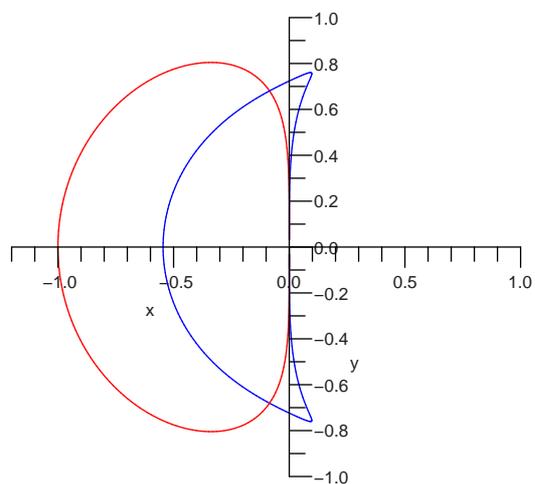


Figura 3.8: Região de estabilidade do método de AB de quarta ordem.

Vejamos algumas aplicações envolvendo as regiões de estabilidade.

# Capítulo 4

## Aplicações

Neste capítulo faremos algumas aplicação dos métodos, mencionados, á EDO e veremos sua estabilidade.

**Aplicação 1** *Aplicando o método de Euler ao PVI*

$$\begin{cases} y' &= -15y \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

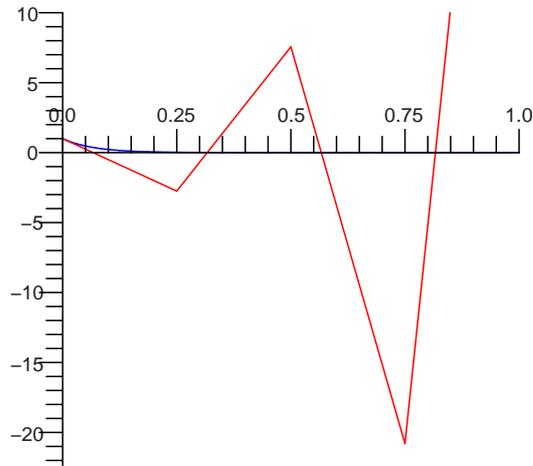
*verifique o comportamento da solução numérica.*

Da condição de estabilidade do método de Euler temos

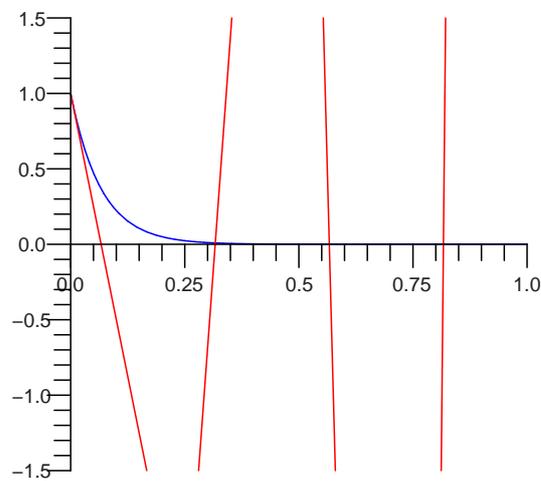
$$|Q(h\lambda)| < 1$$

com  $h = 0,25$  e  $\lambda = -15$  temos  $Q(h\lambda) = 1 + h\lambda = -2,75$  assim  $|Q(h\lambda)|$  não satisfaz a condição de estabilidade do método. Ou seja,  $h\lambda$  não pertence a região de estabilidade do método de Euler.

Observe graficamente: onde a solução do PVI (4.1) é  $y(t) = e^{-15t}$  e está representada na cor azul e a solução aproximada está representada na cor vermelha.

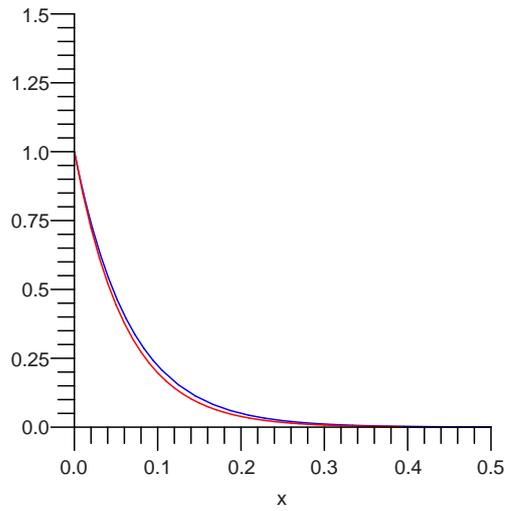


Para obtermos uma melhor visualização do comportamento da solução do PVI em relação a solução aproximada, vamos alterar a escala dos eixos.

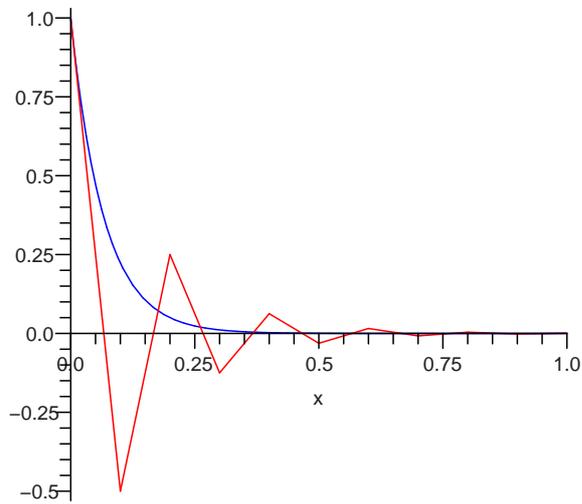


Vimos que para  $h = 0,25$  a solução aproximada é instável. Agora vamos diminuir o tamanho do passo para  $h = 0,01$  e verificar o seu comportamento.

Assim  $Q(h\lambda) = 1 + h\lambda = 0,85$  que satisfaz a condição de estabilidade do método de Euler. Portanto para  $h = 0,01$  a solução é estável. Observe graficamente:



Observe o que acontece se alterarmos o tamanho do passo para  $h = 0,1$ . Assim  $Q(h\lambda) = 1 + h\lambda = -0,5$  que satisfaz a condição de estabilidade do método de Euler.



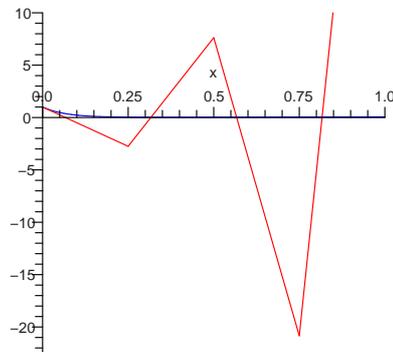
Note que o termo transitório sofre algumas variações mas logo cai para zero.

**Aplicação 2** *Aplicando o método de Euler ao PVI*

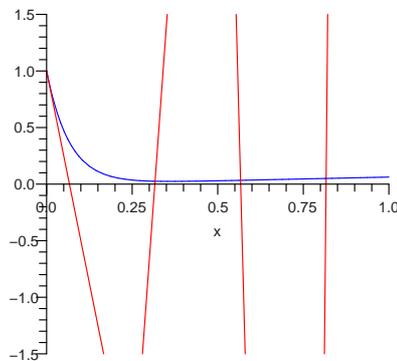
$$\begin{cases} y' &= -15y + t \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad (4.2)$$

*verifique o comportamento da solução numérica.*

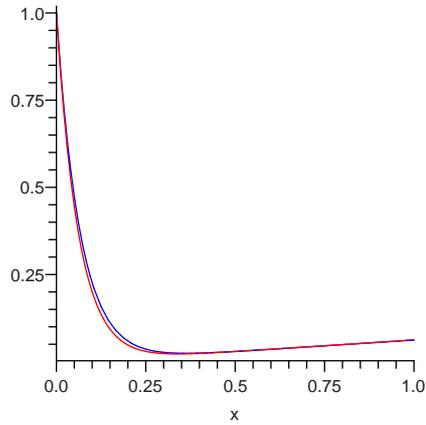
Usando o mesmo procedimento da aplicação 1, a solução do PVI (4.2) é  $y(t) = -\frac{1}{225} + \frac{1}{15}t + \frac{226}{225}e^{-15t}$  e está representada na cor azul e a solução aproximada, com  $h = 0,25$  está representada na cor vermelha.



aqui  $h\lambda$  não pertence a região de estabilidade deste método. vamos alterar a escala dos eixos para uma melhor visualização.



Já para  $h = 0,01$  a solução é estável.

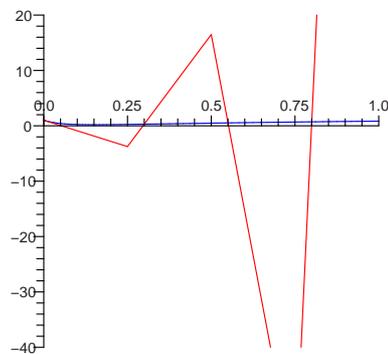


**Aplicação 3** *Aplicando o método de Euler ao PVI*

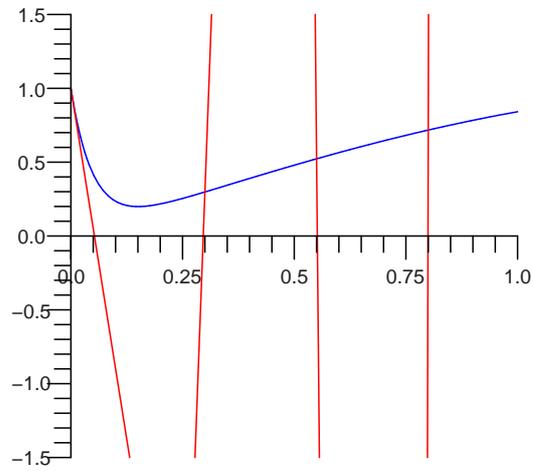
$$\begin{cases} y' &= -20y + 20\text{sent} + \text{cost} \\ y(0) &= 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

*verifique o comportamento da solução numérica.*

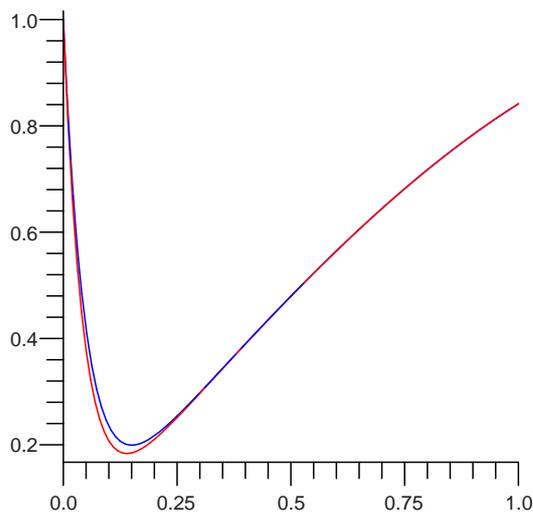
A solução do PVI (4.3) é  $y(t) = \text{sent} + e^{-20t}$  e está representada na cor azul e a solução aproximada, com  $h = 0,25$  está representada na cor vermelha.



Alterando a escala dos eixos temos:



Note que a solução para este PVI é instável com  $h = 0,25$ . Já para  $h = 0,01$  a solução é estável.



# Conclusão

Neste trabalho apresentamos os temas básicos sobre métodos numéricos para EDO's, através dos conceitos de convergência, consistência e estabilidade, com o objetivo de servir de base para estudos mais avançados deste assunto.

Como estes conceitos, que não são abordados na graduação, podemos entender melhor sobre a importância dos métodos, fazer pequenas comparações e analisar se a solução aproximada escolhida é uma boa solução para o problema proposto.

Em diversas áreas encontramos problemas formulados em termos de equações diferenciais, que por consequência envolvem os métodos numéricos. Então para que estas áreas avancem em suas pesquisas necessitam do conhecimento matemático.

Também aprendi a usar dois programas computacionais: Maple (construção de gráficos) e o Latex (editor), que foram indispensáveis para a realização deste trabalho.

# Apêndices

## Implementação das Regiões de Estabilidade no Maple

Neste capítulo detalharemos a construção gráfica da seção 3.4, dos métodos numéricos aplicados a equação teste. Utilizamos o programa **Maple 10** [8].

Ao longo deste capítulo usaremos os seguintes comandos:

- **restart** é utilizado para reiniciar o programa Maple sem sair da tela do Maple.
- **with(plots)** é um pacote que contém instruções para a construção de gráficos.
- **sqrt** comando utilizado para fazer o símbolo da raiz quadrada.
- **expand** serve para expandir a expressão dada.
- **implicitplot** constrói os gráficos da função dada na forma implícita.
- **Complexplot** constrói os gráficos da função dada em um plano complexo.
- **textplot** serve para colocar nome da função no gráfico no local escolhido.
- **display** é utilizado para colocar diversos gráficos na mesma tela.
- **scaling=constrained** refere-se a relação entre os eixos, permite que eles fiquem do mesmo tamanho.

## 1 - Representação Gráfica do Método de Euler Aplicado a Equação Teste

Pela definição 3.2, para os métodos de passo simples temos  $R = \{h\lambda \in \mathbb{C} / |Q(h\lambda)| < 1\}$ . Para obter  $Q(h\lambda)$  aplicamos o método a equação teste, veja exemplo 3.1 . Assim para o método de Euler temos  $Q(h\lambda) = 1 + h\lambda$ , isto é,  $|1 + h\lambda| < 1$ .

Como  $\lambda$  é um número complexo, temos  $|1 + h(a + bi)| < 1$  .

### Procedimento

restart

*with(plots) :*

$s := h.a + h.b.I$

$$h.a + Ih.b$$

$eq := 1 + s$

$$1 + h.a + Ih.b$$

$A := 1 + h.a$

$$1 + ha$$

$B := h.b$

$$hb$$

$Q := \text{sqrt}(A^2 + B^2)$

$$\sqrt{1 + 2ha + h^2a^2 + h^2b^2}$$

$F := \text{subs}(h.a = x, h^2.a^2 = x^2, h^2.b^2 = y^2, Q)$

$$\sqrt{1 + 2x + x^2 + y^2}$$

$P := F < 1$

$$\sqrt{1 + 2x + x^2 + y^2} < 1$$

```
Z :=implicitplot(P, x = -2..2, y = -2..2, color=blue, label=[ha, hb]):
t :=textplot([-1, 0.5, 'Euler '], color=blue):
display({Z, t}, scaling=constrained);
```

## 2 - Representação Gráfica do Método de Euler Aperfeiçoado Aplicado a Equação Teste

Utilizaremos o mesmo critério a seção anterior nas demais seções deste apêndice. Temos para o método de Euler Aperfeiçoado  $|1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}| < 1$ .

### Procedimento

```
restart
```

```
with(plots):
```

```
s := a + b.I
```

$$a + Ib$$

```
eq := expand(1 + h.s + \frac{h^2.s^2}{2})
```

$$1 + ha + Ihb + \frac{1}{2}h^2a^2 + Ih^2ab - \frac{1}{2}h^2b^2$$

```
A := 1 + h.a + \frac{1}{2}.h^2.a^2 - \frac{1}{2}.h^2.b^2
```

$$1 + ha + \frac{1}{2}h^2a^2 - \frac{1}{2}h^2b^2$$

```
B := h.b + h^2.a.b
```

$$hb + h^2ab$$

```
Q := sqrt(A^2 + B^2)
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{4 + 8ha + 8h^2a^2 + 4h^3a^3 + 4h^3ab^2 + h^4a^4 + 2h^4a^2b^2 + h^4b^4}$$

```
F := subs(h.a = x, h^2.a^2 = x^2, h^2.b^2 = y^2, h^3.a^3 = x^3, h^4.a^4 = x^4, h^4.b^4 = y^4, h^3.a.b^2 = x.y^2, h^4.a^2.b^2 = x^2.y^2, Q)
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{4 + 8x + 8x^2 + 4x^3 + 4xy^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4}$$

$P := F < 1$

$$\frac{1}{2}\sqrt{4 + 8x + 8x^2 + 4x^3 + 4xy^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4} < 1$$

$K := \text{expand}(2.P)$

$$\sqrt{4 + 8x + 8x^2 + 4x^3 + 4xy^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4} < 2$$

$Z := \text{implicitplot}(K, x = -2..2, y = -2..2, \text{color}=\text{black}, \text{label}=[ha, hb]):$

$t := \text{textplot}([-1, 0.5, \text{'EulerAperf'}], \text{color}=\text{black}):$

$\text{display}(\{Z, t\}, \text{scaling}=\text{constrained});$

### 3 - Representação Gráfica do Método de Runge-Kutta 3ª ordem Aplicado a Equação Teste

Para o método de Runge-Kutta 3ª ordem temos  $|1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{3!}| < 1$ .

#### Procedimento

$\text{restart}$

$\text{with}(\text{plots}) :$

$s := a + b.I$

$$a + Ib$$

$\text{eq} := \text{expand}(1 + h.s + \frac{h^2.s^2}{2} + \frac{h^3.s^3}{6})$

$$1 + ha + Ihb + \frac{1}{2}h^2a^2 + Ih^2ab - \frac{1}{2}h^2b^2 + \frac{1}{6}h^3a^3 + \frac{1}{2}Ih^3a^2b - \frac{1}{2}h^3ab^2 - \frac{1}{6}Ih^3b^3$$

$$A := 1 + h.a + \frac{1}{2}.h^2.a^2 - \frac{1}{2}.h^2.b^2 + \frac{1}{6}.h^3.a^3 - \frac{1}{2}.h^3.a.b^2$$

$$1 + ha + \frac{1}{2}h^2a^2 - \frac{1}{2}h^2b^2 + \frac{1}{6}h^3a^3 - \frac{1}{2}h^3ab^2$$

$$B := h.b + h^2.a.b + \frac{1}{2}.h^3.a^2.b - \frac{1}{6}.h^3.b^3$$

$$hb + h^2ab + \frac{1}{2}h^3a^2b - \frac{1}{6}h^3b^3$$

$Q := \text{sqrt}(A^2 + B^2)$

$$\frac{1}{6}(36 + 18h^4a^2b^2 + 12h^5a^3b^2 + 6h^5b^4a + 3h^6a^4b^2 + 3h^6a^2b^4 + 72ha + 72h^2a^2 + 48h^3a^3 + 21h^4a^4 + 6h^5a^5 - 3h^4b^4 + h^6a^6 + h^6b^6)^{\frac{1}{2}}$$

$F := \text{subs}(h^4.a^2.b^2 = x^2.y^2, h^5.a^3.b^2 = x^3.y^2, h^5.b^4.a = x.y^4, h^6.a^4.b^2 = x^4.y^2, h^6.a^2.b^4 = x^2.y^4, ha = x, h^2a^2 = x^2, h^3.a^3 = x^3, h^4.a^4 = x^4, h^5.a^5 = x^5, h^4.b^4 = y^4, h^6.a^6 = x^6, h^6.b^6 = y^6, Q)$

$$\frac{1}{6}(36 + 18x^2y^2 + 12x^3y^2 + 6y^4x + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + 72x + 72x^2 + 48x^3 + 21x^4 + 6x^5 - 3y^4 + x^6 + y^6)^{\frac{1}{2}}$$

$P := F < 1$

$$\frac{1}{6}(36 + 18x^2y^2 + 12x^3y^2 + 6y^4x + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + 72x + 72x^2 + 48x^3 + 21x^4 + 6x^5 - 3y^4 + x^6 + y^6)^{\frac{1}{2}} < 1$$

$K := \text{expand}(6.P)$

$$(36 + 18x^2y^2 + 12x^3y^2 + 6y^4x + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + 72x + 72x^2 + 48x^3 + 21x^4 + 6x^5 - 3y^4 + x^6 + y^6)^{\frac{1}{2}} < 6$$

$Z := \text{implicitplot}(K, x = -3..3, y = -3..3, \text{color}=\text{red}, \text{label}=[ha, hb]):$

$t := \text{textplot}([-1, 1.5, 'R-K3'], \text{color}=\text{red}):$

$\text{display}(\{Z, t\}, \text{scaling}=\text{constrained});$

#### 4 - Representação Gráfica do Método de Runge-Kutta 4ª ordem Aplicado a Equação Teste

Para o método de Runge-Kutta 3ª ordem temos

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} + \frac{(h\lambda)^3}{3} + \frac{(h\lambda)^4}{4!} \right| < 1.$$

#### Procedimento

restart

with(plots):

$$s := a + b.I$$

$$a + Ib$$

$$eq := \text{expand}(1 + h.s + \frac{h^2.s^2}{2} + \frac{h^3.s^3}{6} + \frac{h^3.s^4}{24})$$

$$1 + ha + Ihb + \frac{1}{2}h^2a^2 + Ih^2ab - \frac{1}{2}h^2b^2 + \frac{1}{6}h^3a^3 + \frac{1}{2}Ih^3a^2b - \frac{1}{2}h^3ab^2 - \frac{1}{6}Ih^3b^3 \\ + \frac{1}{24}h^4a^4 + \frac{1}{6}Ih^4a^3b - \frac{1}{4}h^4a^2b^2 - \frac{1}{6}Ih^4ab^3 + \frac{1}{24}h^4b^4$$

$$A := 1 + h.a + \frac{1}{2}.h^2.a^2 - \frac{1}{2}.h^2.b^2 + \frac{1}{6}.h^3.a^3 - \frac{1}{2}.h^3.a.b^2 + \frac{1}{24}.h^4.a^4 - \frac{1}{4}.h^4.a^2.b^2 + \frac{1}{24}.h^4.b^4$$

$$1 + ha + \frac{1}{2}h^2a^2 - \frac{1}{2}h^2b^2 + \frac{1}{6}h^3a^3 - \frac{1}{2}h^3ab^2 + \frac{1}{24}h^4a^4 - \frac{1}{4}h^4a^2b^2 + \frac{1}{24}h^4b^4$$

$$B := h.b + h^2.a.b - \frac{1}{2}.h^3.a^2.b - \frac{1}{6}.h^3.b^3 + \frac{1}{6}.h^4.a^3.b - \frac{1}{6}.h^4.a.b^3$$

$$hb + h^2ab - \frac{1}{2}h^3a^2b - \frac{1}{6}h^3b^3 + \frac{1}{6}h^4a^3b - \frac{1}{6}h^4ab^3$$

$$Q := \text{sqr}(A^2 + B^2)$$

$$\frac{1}{24}(576 + 24h^6a^2b^4 + 4h^8a^2b^6 + 6h^8a^4b^4 + 4h^8a^6b^2 + 8h^7ab^6 - 48h^5ab^4 + 24h^7a^5b^2 + 96h^5a^3b^2 + \\ 24h^7a^3b^4 + 72h^6a^4b^2 + 144h^5a^5 + 40h^6a^6 - 8h^6b^6 + 8h^7a^7 + h^8a^8 + 1152ha + 1152h^2a^2 + \\ 768h^3a^3 + 384h^4a^4 + h^8b^8)^{\frac{1}{2}}$$

$$F := \text{subs}(h^5.a^3.b^2 = x^3.y^2, h^6.a^4.b^2 = x^4.y^2, h^5.a.b^4 = x.y^4, h^7.a^5.b^2 = x^5.y^2, h^7.a^3.b^4 = \\ x^3.y^4, h^6.a^2.b^4 = x^2.y^4, h.a = x, h^2.a^2 = x^2, h^3.a^3 = x^3, h^4.a^4 = x^4, h^7.a.b^6 = x.y^6, h^8.a^6.b^2 = \\ x^6.y^2, h^8.a^4.b^4 = x^4.y^4, h^8.a^2.b^6 = x^2.y^6, h^5.a^5 = x^5, h^6.a^6 = x^6, h^6.b^6 = y^6, h^7.a^7 = \\ x^7, h^8.a^8 = x^8, h^8.b^8 = y^8, Q)$$

$$\frac{1}{24}(576 + 24x^2y^4 + 4x^2y^6 + 6x^4y^4 + 4x^6y^2 + 8xy^6 - 48xy^4 + 24x^5y^2 + 96x^3y^2 + 24x^3y^4 + \\ 72x^4y^2 + 144x^5 + 40x^6 - 8y^6 + 8x^7 + x^8 + 1152x + 1152x^2 + 768x^3 + 384x^4 + y^8)^{\frac{1}{2}}$$

$$P := F < 1$$

$$\frac{1}{24}(576 + 24x^2y^4 + 4x^2y^6 + 6x^4y^4 + 4x^6y^2 + 8xy^6 - 48xy^4 + 24x^5y^2 + 96x^3y^2 + 24x^3y^4 + \\ 72x^4y^2 + 144x^5 + 40x^6 - 8y^6 + 8x^7 + x^8 + 1152x + 1152x^2 + 768x^3 + 384x^4 + y^8)^{\frac{1}{2}} < 1$$

$$K := \text{expand}(24.P)$$

$$(576 + 24x^2y^4 + 4x^2y^6 + 6x^4y^4 + 4x^6y^2 + 8xy^6 - 48xy^4 + 24x^5y^2 + 96x^3y^2 + 24x^3y^4 + 72x^4y^2 + 144x^5 + 40x^6 - 8y^6 + 8x^7 + x^8 + 1152x + 1152x^2 + 768x^3 + 384x^4 + y^8)^{\frac{1}{2}} < 24$$

$Z := \text{implicitplot}(K, x = -3..3, y = -3..3, \text{color}=\text{red}, \text{label}=[ha, hb]):$

$t := \text{textplot}([-1, 1.5, 'R-K3'], \text{color}=\text{red}):$

$\text{display}(\{Z, t\}, \text{scaling}=\text{constrained});$

## 5 - Representação Gráfica do Método de Adams-Bashforth 2ª ordem Aplicado a Equação Teste

Pela definição 3.2, para métodos de passo múltiplo temos  $R = \{h\lambda \in \mathbb{C} / |\beta_k| < 1, \text{ para toda raiz } \beta_k \in Q(z, h\lambda)\}$ . Para obter  $Q(z, h\lambda)$  aplicamos o método a equação teste, assim temos:

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= w_k + \frac{h}{2}(3f_k - f_{k-1}) \quad \text{ou seja,} \\ w_{k+1} &= w_k + \frac{3h\lambda}{2}w_k - \frac{h\lambda}{2}w_{k-1}. \end{aligned}$$

Substituindo  $w_k$  por  $z^k$  e em seguida dividindo por  $z^{k-1}$  temos:

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k + \frac{3h\lambda}{2}z^k - \frac{h\lambda}{2}z^{k-1}, \\ z^2 &= \left(1 + \frac{3h\lambda}{2}\right)z - \frac{h\lambda}{2} \quad \text{ou seja,} \\ h\lambda &= \frac{2(z^2 - z)}{3z - 1}. \end{aligned}$$

Desta forma vamos formar duas seqüências no plano complexo, uma representando o modulo das raízes de  $z$  menor que um, e a outra  $h\lambda$  em função das raízes de  $z$ , onde  $h\lambda$  está sendo representada pela seqüência  $r[k]$ .

### Procedimento

$\text{restart}$

$\text{with}(plots):$

$N := 200 : \text{for } k \text{ from } 1 \text{ to } N \text{ do } z[k] := \exp\left(\frac{1.2 \cdot \text{Pi} \cdot k}{N}\right) \text{ od} :$

$\text{for } k \text{ from } 1 \text{ to } N \text{ do } r[k] := \frac{2 \cdot ((z[k])^2 - z[k])}{3 \cdot z[k] - 1} \text{ od} :$

$A := [seq(z[k], k = 1..N)] :$

$B := [seq(r[k], k = 1..N)] :$

$complexplot(B, x = -1..1, y = -1..1, style = line, scaling = constrained);$

## 6 - Representação Gráfica do Método de Adams-Bashforth 3ª ordem Aplicado a Equação Teste

Utilizando o mesmo critério do item anterior temos:

$$\begin{aligned}w_{k+1} &= w_k + \frac{h}{12}(23f_k - 16f_{k-1} + 5f_{k-2}) \quad \text{ou seja,} \\w_{k+1} &= w_k + \frac{23h\lambda}{12}w_k - \frac{16h\lambda}{12}w_{k-1} + \frac{5h\lambda}{12}w_{k-2} .\end{aligned}$$

Substituindo  $w_k$  por  $z^k$  e em seguida dividindo por  $z^{k-2}$  temos:

$$\begin{aligned}z^{k+1} &= z^k + \frac{23h\lambda}{12}z^k - \frac{16h\lambda}{12}z^{k-1} + \frac{5h\lambda}{12}z^{k-2} , \\z^3 &= \left(1 + \frac{23h\lambda}{12}\right)z^2 - \frac{16h\lambda}{12}z + \frac{5h\lambda}{12} \quad \text{ou seja,} \\h\lambda &= \frac{12(z^3 - z^2)}{23z^2 - 16z + 5} .\end{aligned}$$

Formando as duas seqüências no plano complexo temos:

### Procedimento

$restart$

$with(plots) :$

$N := 200 : \text{for } k \text{ from } 1 \text{ to } N \text{ do } z[k] := \exp\left(\frac{1.2 \cdot \text{Pi} \cdot k}{N}\right) \text{ od} :$

$\text{for } k \text{ from } 1 \text{ to } N \text{ do } r[k] := \frac{12 \cdot ((z[k])^3 - (z[k])^2)}{23 \cdot (z[k])^2 - 16 \cdot z[k] + 5} \text{ od} :$

$A := [seq(z[k], k = 1..N)] :$

$B := [seq(r[k], k = 1..N)] :$

$complexplot(B, x = -1..1, y = -1..1, style = line, scaling = constrained);$

# Referências Bibliográficas

- [1] LEITHOLD, Louis. O cálculo com geometria analítica. 3<sup>a</sup>ed. vol 2. São Paulo: Harba 1994.
- [2] COURANT, R. Cálculo diferencial e integral. 1<sup>a</sup>ed. vol2. Porto Alegre: Globo S.A. 1963.
- [3] SEPERANDIO, Décio; MENDES, João Teixeira; SILVA, Luiz Henry Monken e. Cálculo Numérico - Características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos. São Paulo: Prentice Hall, 2003.
- [4] GEAR, C.W. Numerical Initial-Value Problems in Ordinary Differential Equations. N.Y: Prentice Hall, 1971.
- [5] ATKINSON, Kendal E. An introduction to numerical analysis. Nova York: John Wiley & Sons, 1978.
- [6] BOYCE, William E; DIPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 6<sup>a</sup>ed. Rio de Janeiro: John Wiley & Sons, 1997.
- [7] ISAACSON, E; KELLER, H. B. Analysis of Numerical Methods. New York: John Wiley & Sons, 1966.
- [8] TANEJA, Inder Jeet. Maple V: Uma abordagem computacional no ensino de cálculo. UFSC, 1997.
- [9] [http://www.en.wikipedia.org/differential\\_galois\\_theory](http://www.en.wikipedia.org/differential_galois_theory). Acesso em: 12 jan. 2007.

- [10] STKIWERDA, John C. Finite Difference Schemes and Partial Differential Equation. Second Edition. Jiam,1989.
- [11] BURDEN, Richard L; FAIRES, J. Douglas. Numerical Analysis. 5<sup>a</sup> ed. Fifth Edition, 1993.