

**JAIRO TELMOS MATOS JUNIOR**

**A REPRESENTAÇÃO EM PERSPECTIVA E AS FIGURAS IMPOSSÍVEIS  
PRESENTES NOS TRABALHOS DO ARTÍSTA GRÁFICO MAURITS CORNELIS  
ESCHER**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao  
Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura  
Departamento de Matemática,  
Sob a orientação da  
Profª Dra. Cláudia Regina Flores.

**Centro de Ciências Físicas e Matemáticas  
Universidade Federal de Santa Catarina**

**FLORIANÓPOLIS  
FEVEREIRO DE 2007**

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura, e aprovada em sua forma final pela banca examinadora designada pela Portaria nº 10/CCM/07

  
Prof<sup>a</sup>. Carmem Suzane Comitre Gimenez

Banca Examinadora:

  
Prof<sup>a</sup>. Dra. Cláudia Regina Flores  
Orientadora

  
Prof<sup>a</sup>. Carmem Suzane Comitre Gimenez

  
Prof. Nereu Estanislau Burin

Dedico este trabalho à minha família,  
à Deus, aos meus amigos  
e a todos os que me proporcionaram  
momentos felizes e aprendizado  
nesta vida.

Agradecimentos aos mestres, à minha orientadora,  
à família, pelo apoio e conforto,  
aos amigos, pela companhia nesta jornada,  
à Cristiane, pelo auxílio e paciência nos momentos difíceis  
e a todos que desejaram meu sucesso.

“Um homem propõe-se a tarefa de desenhar o mundo. Ao longo dos anos povoa um espaço com imagens de províncias, de reinos, de montanhas, de baías, de naves, de ilhas, de peixes, de habitação, de instrumentos, de astros, de cavalos e de pessoas. Pouco antes de morrer, descobre que esse paciente labirinto de linhas traça a imagem de seu rosto.”

Jorge Luiz Borges, 1952

## SUMÁRIO

RESUMO.....	6
INTRODUÇÃO.....	7
<b>CAPÍTULO I</b>	
1.1 Vida e Obra de M. C. Escher.....	9
1.2 A Gênese de sua obra.....	11
1.2.1 Estrutura do espaço.....	11
1.2.2 Estrutura da superfície. ....	13
1.2.3 A Representação pictórica da relação entre espaço e superfície plana. ....	16
<b>CAPÍTULO II</b>	
2.1 A Perspectiva.....	19
2.1.1 Estrutura da Perspectiva. ....	19
2.1.2 Perspectivas em Projeção Cilíndrica.....	21
2.1.3 Perspectivas em Projeção Cônica. ....	24
2.2 As Figuras Impossíveis.....	30
2.2.1 O Triângulo de Penrose.....	33
2.2.2 A Escada de Penrose.....	36
<b>CAPÍTULO III</b>	
3.1 Escher e a Perspectiva.....	39
3.1.1 Nadir e Zênite.....	39
3.1.2 Relatividade.....	41
3.1.3 Novas leis para a perspectiva ....	44
3. 2 Escher e as figuras impossíveis.....	49
3.2.1 Belvedere.....	50
3.2.2 Queda de Água.....	54
3.2.3 Subindo e Descendo.....	56
CONCLUSÓES.....	60
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	61
APÊNDICE: LISTA DE ILUSTRAÇÕES.....	66

## INTRODUÇÃO

A Matemática sempre foi vista como uma ciência puramente abstrata, onde muito poucos poderiam perceber a beleza e a harmonia desta ciência. Durante minha vida acadêmica, venho a conhecer o lado humano e artístico da Matemática, principalmente incluso nas Artes, como na Música, na Pintura, etc.. Este aspecto artístico da Matemática veio a despertar meu interesse, principalmente após conhecer algumas obras que me causaram assombro e perplexidade. O preenchimento de superfícies com figuras que parecem transformar-se em outras, a presença inquietante do infinito, as estruturas que de forma alguma poderiam existir no mundo real são algumas dessas obras que, pela presença inquietante da matemática, acabaram por me inspirar na produção deste meu Trabalho de Conclusão de Curso sobre o autor de todas estas obras: Maurits Cornelis Escher.

Inicialmente, neste trabalho, abordarei a vida de Escher e seu início no mundo das Artes Gráficas, bem como suas inspirações. Ao longo dos trabalhos de Escher, podemos perceber três grandes temas: a estrutura das superfícies; a estrutura do espaço, e a relação entre a superfície e o espaço, sendo esta última o campo de abordagem de meu trabalho, mais especificamente no âmbito da perspectiva e das figuras impossíveis. Ainda neste capítulo, teremos exemplos de algumas obras presentes em cada um destes temas.

Será tratado, em seguida de um estudo sobre a estrutura destes temas abordados: a perspectiva e as figuras impossíveis. Sobre a perspectiva, busco um enfoque mais técnico, onde podemos perceber mais claramente os tipos de perspectivas encontradas, seus principais conceitos e características, bem como as áreas onde são empregadas. Sobre figuras impossíveis, falo sobre figuras que somente podem existir no papel, onde temos a sugestão de uma tridimensionalidade impossível de se por em prática, salvo se for através de uma ilusão de ótica vista sob um determinado ponto de vista.

Abordaremos, também, o uso destes elementos por Escher em suas mais fascinantes e conhecidas obras. Nelas poderemos ver a influencias destes

mesmos elementos em sua gênese, além de outros pontos de vista de algumas destas obras.

A importância desta abordagem no âmbito da Matemática deve-se à relevância da percepção tridimensional de figuras espaciais assim como suas representações. A necessidade da compreensão da técnica e de suas demais aplicações permite-nos entender o modo como se olha estas figuras (FLORES, 2003).

Por fim, este trabalho tem como objetivo mostrar as aplicações da matemática no universo artístico, mais objetivamente nos trabalhos de Escher, além de servir de auxílio para futuros estudos sobre a obra de Escher e a Matemática nela contida.



## CAPÍTULO I

### 1.1 Vida e Obra de M. C. Escher.

Maurits Cornelis Escher é um dos artistas gráficos mais famosos do mundo, tendo sua obra admirada por milhões de pessoas, e graças ao advento da Internet, agora se encontra à disposição, espalhada em diversas páginas na rede mundial de computadores. Sua fama advém da originalidade de seus trabalhos, principalmente das obras conhecidas como estruturas impossíveis, pavimentações e transformações.

Nascido a 17 de junho de 1898, em Leeuwarden, no norte da Holanda, filho de um engenheiro civil, Escher foi estimulado por seu pai ao aprendizado da carpintaria, de onde vêm suas técnicas e seu gosto por trabalho na madeira. Apesar da grande capacidade matemática que as pessoas lhe atribuem, em sua formação na Escola Secundária não demonstrava ser um bom aluno. Duas vezes reprovado, só lograva êxito em suas aulas de desenho, duas vezes por semana.

Em 1919, por conselho de seu pai, Escher ingressa no curso de Arquitetura na Escola de Arquitectura e Artes Decorativas de Haarlem. Samuel Jesserum de Mesquita, professor de técnicas de gravura artística, ao perceber que o talento do jovem estudante inclinava-se mais para as artes gráficas, promoveu-lhe a mudança de curso de Artes Decorativas, passando a ser seu principal professor. (ERNST, 1991).

Escher passa agora a dominar a técnica da xilogravura, técnica de gravura na qual se utiliza madeira como matriz e possibilita a reprodução da imagem gravada sobre papel ou outro suporte adequado. Em 1922, Escher deixa seu curso de Artes e parte para a Itália, onde descobre uma paisagem e uma arquitetura com elementos romanos, gregos e sarracenos, de tal maneira entrelaçados, que o fascinaram. (ERNST, 1991)

No sul da Itália, Escher conhece Jetta Umiker, com quem se casa em 1924. Juntamente com outros amigos artistas, passa a viajar por diversas regiões da Itália, onde produziam centenas de desenhos. Mas em 1935, devido ao clima

político tenso na Itália, acaba mudando-se com sua família para a Suíça. Porém a paisagem de neve entediava-lhe, assim, em 1936, começa a fazer viagens pela costa mediterrânea em cargueiros, em troca de suas gravuras. (ERNST, 1991).

Em 1937, muda-se para a Bélgica, já na iminência da guerra e, em 1941, muda-se para Baarn, na Holanda, onde se fixa com sua família e passa a produzir com sossego e regularidade. Em 1969 produz ainda uma estampa, Serpentes, onde mostra que sua perícia em nada havia diminuído. Escher faleceu em Laren, norte da Holanda, em 27 de março de 1972. (ERNST, 1991)

Escher foi um artista cuja obra não se enquadra em nenhum outro contexto artístico. Até 1937, não seria necessário muito esforço para falar da obra de Escher, em sua maioria pictórica. “Um artista, cujas obras eram ao mesmo tempo, poéticas e cativantes, cujos retratos eram de tão grande expressividade...” (ERNST, 1991).

Porém, a partir de 1938, o pitoresco deixou de o interessar. A regularidade e as estruturas matemáticas, a continuidade, o infinito e a reprodução em três dimensões de uma superfície bidimensional eram agora o tema, a inspiração de Escher. Mas como pode ser classificada a obra de Escher? Se definirmos Arte como a expressão de sentimentos, devemos descartar toda a obra de Escher após 1937, obra esta determinada pela razão, tanto em seu objetivo como em sua execução. (ERNST, 1991).

Porém há um sentimento presente em todas estas obras de Escher: seu entusiasmo por cada nova descoberta. Cada trabalho seu é fruto de muito estudo, exploração e investigação. Cada estampa acabada é fruto de uma gradativa evolução de idéias e esboços.

“Alguns trabalhos seus têm uma aparência misteriosa e surrealista, não sendo bem as fantasias oníricas de um Salvador Dalí, ou de um René Magritte, mas antes sutis observações filosóficas que pretendem evocar aquilo que o poeta Howard Nemerov denominou de o mistério, o paradoxo, por vezes até terror deste mundo” (GARDNER, 1966, apud CATÁLOGO EXPOSIÇÃO: OBRAS DE ESCHER – EXPOSIÇÃO NO BRASIL 1993-1994).

## **1.2 A Gênese de sua obra.**

Segundo Bruno Ernst, 1991, podemos, em uma primeira análise, classificar as obras de Escher em antes e depois de 1937. As obras anteriores a 1937 têm como pano de fundo, em sua maioria, paisagens da Itália e do Mediterrâneo. Após 1937 encontramos cerca de 70 gravuras onde encontramos agora a lógica, o racional, a matemática e o absurdo; onde cada obra está relacionada a uma descoberta, a uma nova experiência.

Destacamos três grandes temas presentes ao longo de sua obra:

1. A estrutura do espaço.
2. A estrutura da superfície.
3. A representação pictórica da relação entre o espaço e a superfície plana.

### **1.2.1 Estrutura do espaço.**

Podemos perceber nas gravuras paisagísticas de Escher que o que lhe atrai não é o pitoresco, o gracioso, mas antes, a sua forma, sua estrutura. Isso advém também de sua experiência na Arquitetura.

Após 1937, Escher analisa e expõe suas descobertas sobre as relações entre espaços numa mesma gravura, ocasionando uma interpenetração de mundos. “Não mais deixa intacto o espaço como o encontra, mas realiza sínteses, em que aparecem vários espaços ao mesmo tempo, sobre uma e a mesma imagem, com uma lógica concludente” (ERNST, 1991, pg 20).

Temos também as figuras rigorosamente matemáticas, onde encontramos sólidos geométricos abstratos, que resultam da admiração de Escher pela formas cristalográficas.

Portanto, neste tema, podemos destacar três categorias:

- a) Composições paisagísticas (fig. 1);
- b) Interpenetração de mundos diferentes. (fig. 2);
- c) Sólidos geométricos abstratos. (fig. 3).

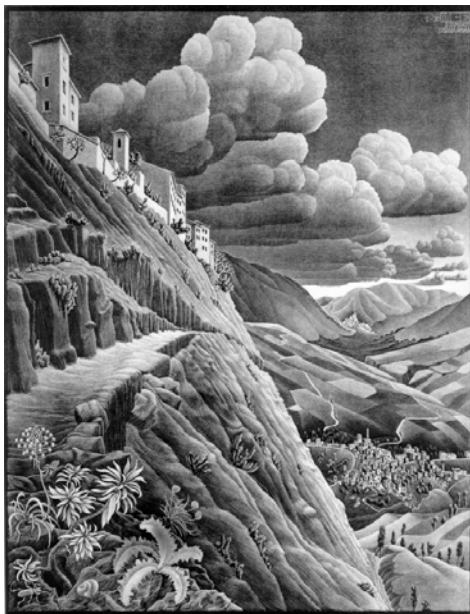


Figura 1: Castrovalva, Litografia, 1930.



Figura 2: Mão com esfera refletora, Litografia, 1935.

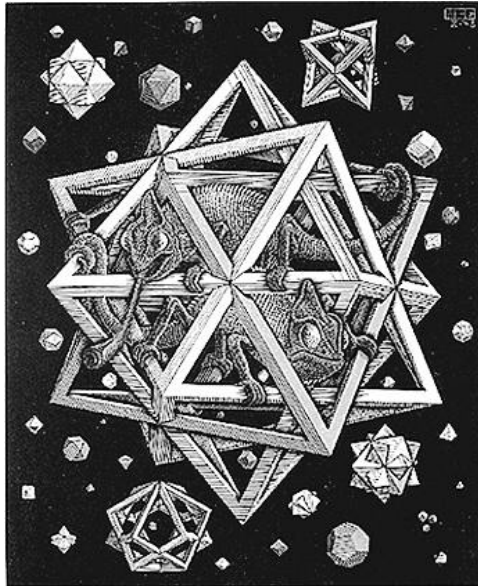


Figura 3: Estrelas, Xilogravura, 1948.

### 1.2.2 Estrutura da superfície.

Após uma visita ao castelo de Alhambra, em Granada, ao sul da Espanha, tem-se início o interesse de Escher pela divisão regular da superfície. Inspirado nos mosaicos islâmicos de Alhambra (fig. 4), Escher inicia um estudo rigoroso do sistema de divisão do plano, pavimentações regulares e grupos de simetria.



Figura 4: Esboço de Escher de um mosaico de Alhambra, 1922.

Com base neste estudo, elaborou um sistema completo de divisão do plano, o que atraiu a admiração de cristalógrafos e matemáticos, mas diferentemente destes, não estava interessado na classificação dos padrões das

pavimentações, ou em suas propriedades invariantes, e sim nas leis que a governam.

Não há gravuras que abordam exclusivamente estes temas, presentes apenas em seu álbum de esboços. Porém há a utilização destes padrões em suas gravuras de metamorfoses, onde figuras geometricamente rigorosas acabam transformando-se em figuras reconhecíveis, como animais, plantas e pessoas (ERNST, 1991).

*“Que tipo de figuras? Manchas irregulares e sem forma, incapazes de invocar qualquer idéia em nós? Ou figuras geométricas, lineares, abstratas, retângulos ou hexágonos que, na melhor das hipóteses, podem sugerir um tabuleiro de xadrez ou um favo de mel? Não, não somos cegos, surdos e mudos, observamos cuidadosamente as formas que nos rodeiam e que, na sua diversidade, nos fala numa linguagem própria e excitante. Conseqüentemente as formas com que compomos as divisões de uma superfície são reconhecíveis como sinais, como símbolos distintos da matéria viva ou morta que nos rodeia” (ESCHER, apud MARTINHO, 1998, p. 15).*

Estas divisões encontram-se presentes também em seus trabalhos classificados como ciclos. Em seus ciclos está inclusa a idéia do infinito. Um processo evolutivo que acaba por chegar ao seu ponto de origem. A temática cíclica está presente em diversos trabalhos, não apenas nos referentes a pavimentações, e neles percebemos a essência do infinito atemporal, eterno, onde o fim é o próprio começo, enquanto na pavimentação temos o infinito espacial, onde cada padrão é uma seqüência de si próprio.

Por fim, experiências com pavimentações mais complexas acabam por levar Escher à uma nove série de trabalhos – os limites. A superfície não é preenchida com figuras congruentes, mas sim isomórficas, que nos dá uma sensação de infinito a sua redução à menor escala possível. A inserção de Escher pela temática dos limites abrange as evoluções com o centro cada vez mais reduzido, reduções em espirais até a série de limites circulares, cujo ápice vemos na xilogravura Limite circular III.

Vimos então que a estrutura da superfície é o pilar destes três grupos de gravuras:

- a) Metamorfoses (fig. 5);

- b) Ciclos (fig. 6);
- c) Aproximação ao infinito (fig. 7).

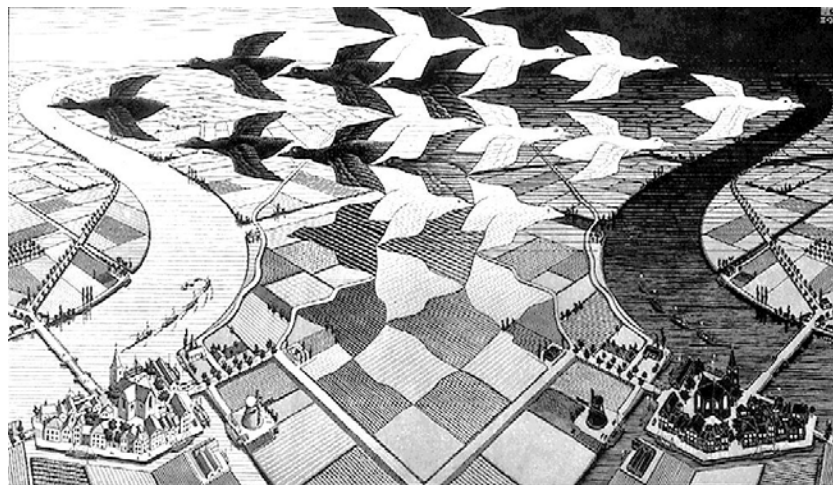


Figura 5: Dia e noite, Xilogravura, 1938.



Figura 6: Répteis, Litografia, 1943.

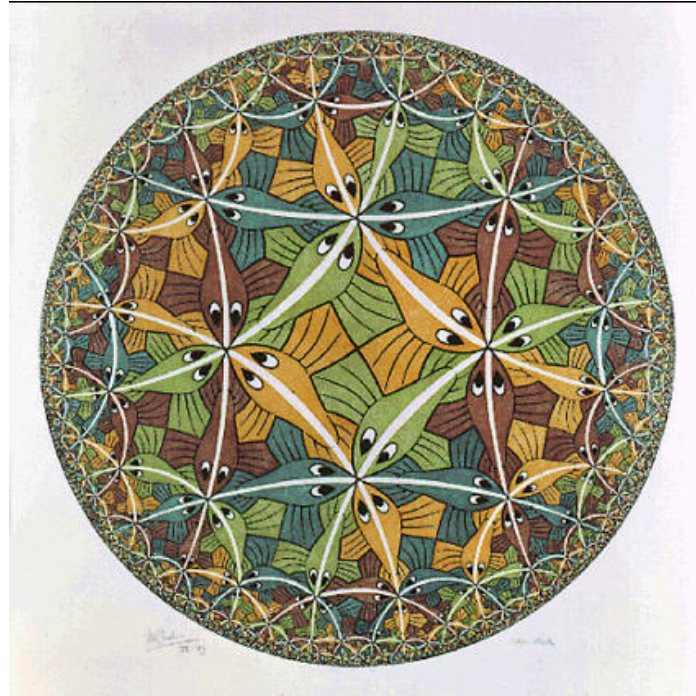


Figura 7: Limite Circular III, Xilogravura, 1959.

### 1.2.3 A Representação pictórica da relação entre espaço e superfície plana.

Após termos visto as temáticas espaço e superfície nos trabalhos de Escher, veremos agora seu novo desafio: a representação de três dimensões num plano bidimensional. “A representação da realidade física tridimensional em superfícies planas, bidimensionais, é uma prática que desde sempre esteve presente na expressão gráfica/artística do homem” (MARTINHO, 1998, P. 17).

Podemos perceber em diversas obras de Escher este jogo entre plano e espaço; uma figura plana, bidimensional, que, no entanto, quer se libertar, ser tridimensional. São nestas situações de conflitos interdimensionais que vemos Escher embrenhar-se no universo da perspectiva, e, através de seu estudo intenso e dedicado, nos leva a uma viagem por pontos de vista insólitos e fascinantes.

Temos como ápice a construção de gravuras que só podem existir no papel: as figuras impossíveis, que se sugerem tridimensionais, mas que não podem efetivamente ser construídas nesta dimensão.



Novamente encontramos nesta categoria três grupos de gravuras:

- a) Conflito espaço-superfície (fig. 8);
- b) Perspectiva (fig. 9);
- c) Figuras impossíveis (fig. 10).

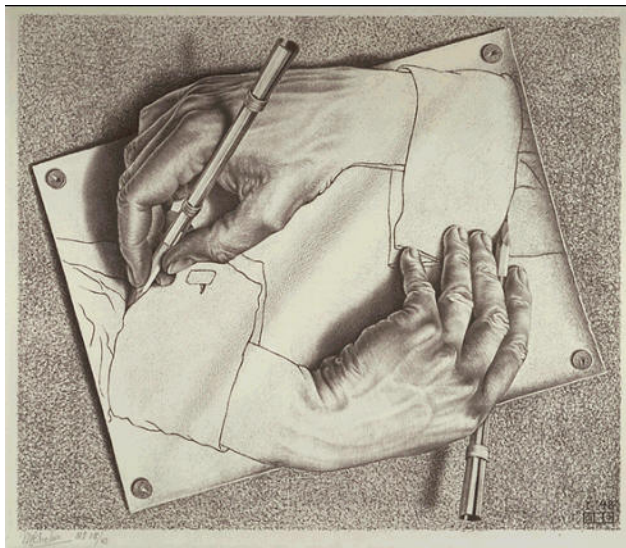


Figura 8: Mãos desenhando-se, Litografia, 1948.

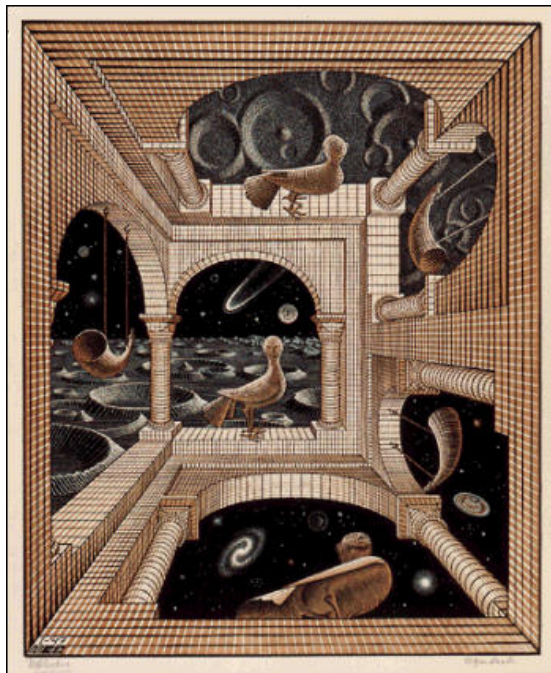


Figura 9: Outro mundo, Xilogravura, 1947.



Figura 10: Belvedere, Litografia, 1958.

É referente a esta temática, mais precisamente no âmbito da perspectiva e das figuras impossíveis, que estará focado este estudo de caso, através do estudo da perspectiva e da análise da gênese de alguns dos mais fascinantes trabalhos de Escher.

## CAPÍTULO II

Para um estudo mais aprofundado da temática de Escher na qual é abordada a representação do universo tridimensional no plano, teremos a abordagem de dois temas essenciais: a perspectiva e as figuras impossíveis.

### 2.1 A Perspectiva.

Segundo a enciclopédia virtual Wikipédia<sup>1</sup> “define-se a perspectiva como a projeção em uma superfície bidimensional de um determinado fenômeno tridimensional”. Em outras palavras, é a arte de representarmos objetos, pessoas, paisagem em uma superfície plana como estas se apresentam ao nosso olhar.

A perspectiva consiste na técnica de traçar imagens e objetos tridimensionais sobre uma superfície plana, bidimensional, possibilitando assim uma percepção mais realista, fiel do modelo que se quer representar. É uma ilusão que nossa percepção visual produz para que possamos entender a profundidade, volume e distância dos objetos contidos na representação. (CARRION, 2005)

Para uma abordagem mais ampla sobre a perspectiva, é preciso conhecer as estruturas básicas de sua construção.

#### 2.1.1 Estrutura da Perspectiva.

A Geometria Descritiva define a perspectiva como um tipo especial de projeção, na qual são possíveis de se medir três eixos dimensionais em um espaço bi-dimensional. Para termos uma projeção, são necessários estes dois elementos: o observador e o objeto observado. A perspectiva ocorrerá quando todos os pontos do objeto estiverem projetados em uma superfície (chamado de plano do quadro), onde a linha que une os pontos do objeto aos seus respectivos

---

<sup>1</sup> [http://pt.wikipedia.org/wiki/Perspectiva\\_%28gr%C3%A1fica%29](http://pt.wikipedia.org/wiki/Perspectiva_%28gr%C3%A1fica%29) Acesso em 03 de janeiro de 2007.

pontos projetados no quadro deve possuir uma origem, a qual se encontra no observador. (Wikipédia<sup>2</sup>)

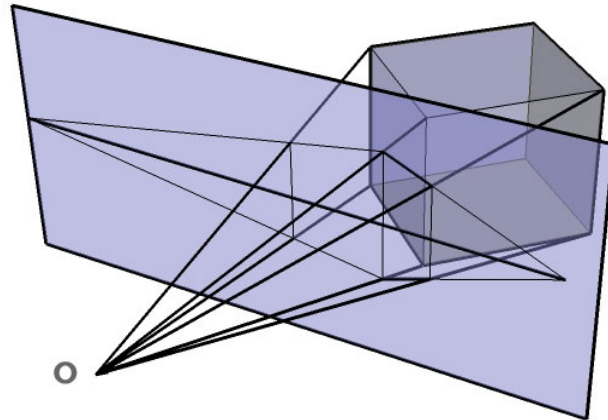


Figura 11. Observador, objeto e plano do quadro.

A perspectiva manifesta-se tanto nas projeções cônicas, onde encontramos uma perspectiva artística, como nas projeções cilíndricas, com uma ênfase mais técnica. (CANOTILHO, 2005, p.48)

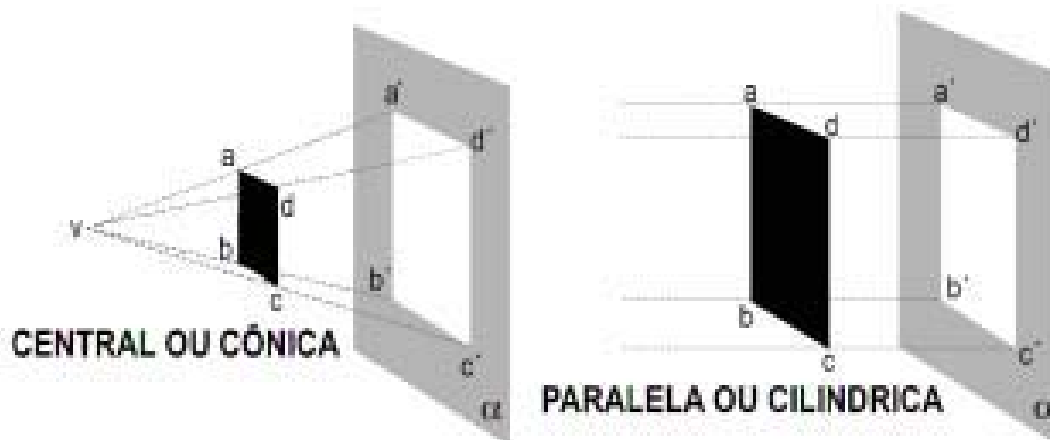


Figura 12. Projeções cônica e cilíndrica.

<sup>2</sup> [http://pt.wikipedia.org/wiki/Perspectiva\\_%28gr%C3%A1fica%29](http://pt.wikipedia.org/wiki/Perspectiva_%28gr%C3%A1fica%29) Acesso em 03 de janeiro de 2007.

De acordo com a Wikipédia<sup>3</sup>, dependendo da posição do observador (que pode estar localizada em um ponto no espaço ou no infinito), do objeto (entre o quadro e o observador, antes ou depois) e do quadro, a projeção resultante será diferente, gerando diversas categorias de perspectiva a serem vistas a seguir.

### 2.1.2 Perspectivas em Projeção Cilíndrica.

Na projeção cilíndrica, também chamada de projeção paralela, o observador encontra-se no infinito, portanto as linhas que chegam ao plano do quadro são paralelas entre si. Esta é uma projeção muito utilizada em áreas mais técnicas como a Engenharia e a Arquitetura. As perspectivas resultantes deste tipo de projeção variam de acordo com o ângulo de incidência das retas projetantes sobre o plano de quadro, podendo ser uma projeção ortogonal ou uma projeção oblíqua:

#### Projeção Ortogonal

Em uma projeção ortogonal, também conhecida como axonométrica, as retas projetantes incidem perpendicularmente sobre o plano do quadro. As perspectivas resultantes dessa projeção diferenciam-se pela disposição dos eixos (x, y, z) no plano de quadro, podendo ser:

- **Perspectiva Isométrica:** o sistema de eixos da situação a ser projetada encontra-se de forma eqüi-angular (em ângulos de 120°).
- **Perspectiva Dimétrica:** nesta situação, o sistema de eixos possui apenas dois ângulos iguais.
- **Perspectiva Trimétrica:** os ângulos do sistema de eixos da projeção são diferentes entre si.

---

<sup>3</sup> [http://pt.wikipedia.org/wiki/Perspectiva\\_%28gr%C3%A1fica%29](http://pt.wikipedia.org/wiki/Perspectiva_%28gr%C3%A1fica%29) Acesso em 03 de janeiro de 2007.

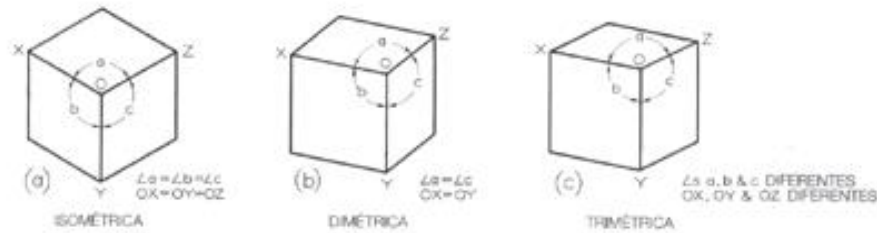


Figura 13. Perspectivas isométrica, dimétrica e trimétrica.

### Projeção Oblíqua

Em uma projeção oblíqua, as retas projetantes incidem sobre o plano do quadro de forma não-perpendicular. Deste modo, se uma das faces do objeto estiver paralela ao plano do quadro, esta face será projetada em verdadeira grandeza (as medidas da projeção serão iguais às do objeto) enquanto as demais sofrerão uma distorção perspéctica. Dependendo do ângulo de incidência das retas projetantes, o fator de correção a ser utilizado na mensuração das arestas será diferente.

Dentre as perspectivas que resultam desta projeção, as mais conhecidas são a perspectiva cavaleira e a militar.

- **Perspectiva Cavaleira:**

É uma perspectiva que resulta de uma projeção oblíqua, cuja face frontal do objeto é paralela ao plano de quadro, preservando suas dimensões originais. Afirma-se que o nome cavaleira, ou cavalheira, provém do nome dado a um tipo de construção alta, o *cavalier*, que existia em certas fortificações militares do séc. XVI e de onde se tinha sobre a própria fortificação uma visão "do alto", que seria semelhante à dada pela perspectiva cavaleira. Na perspectiva cavaleira, os eixos de altura e de largura encontram-se em escala normal, enquanto o eixo de profundidade dependerá do ângulo de incidência e do fator de redução  $k$ . (MOREIRA, 2006)

Podemos destacar três tipos de perspectiva cavaleira em relação ao eixo de profundidade e seu fator de redução  $k$  :

- a) Cavaleira  $30^\circ$ ,  $k = 2/3$ ;
- b) Cavaleira  $45^\circ$ ,  $k = 1/2$ ;
- c) Cavaleira  $60^\circ$ ,  $k = 2/3$ .

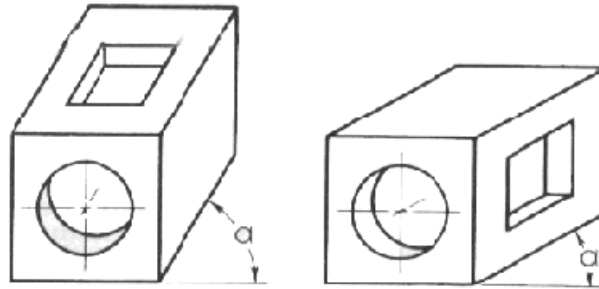


Figura 14. Perspectiva cavaleira vista em ângulos de  $60^\circ$  e  $30^\circ$  respectivamente.

- **Perspectiva Militar:**

A perspectiva militar, também chamada de perspectiva aérea ou vôo de pássaro, é uma perspectiva onde os eixos X e Y (largura e profundidade) formam entre si um ângulo reto. Para construí-lo é necessário reduzir as medidas do eixo Z (altura) em  $2/3$ . (BARISON, 2005).

“Recebeu o nome de militar, pois foi uma perspectiva bastante utilizada para simular situações de topografia de terreno em mapas destinados a fins de estratégia militar, quando se colocava a face paralela ao plano de quadro correspondente ao plano do solo. Desta forma, quem via a perspectiva tinha a sensação de possuir uma visão de “olho-de-pássaro” sobre o terreno representado.”.(WIKIPÈDIA<sup>4</sup>).

<sup>4</sup> [http://pt.wikipedia.org/wiki/Perspectiva\\_%28gr%C3%A1fica%29](http://pt.wikipedia.org/wiki/Perspectiva_%28gr%C3%A1fica%29) Acesso em 03 de janeiro de 2007.

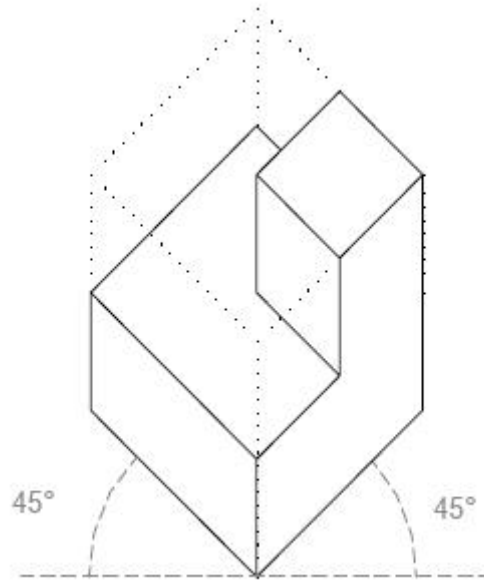


Figura 15. Perspectiva militar.

### 2.1.3 Perspectivas em Projeção Cônica.

Segundo a Wikipédia, “[...] as perspectivas cônicas são as mais comumente associadas à idéia de perspectiva, pois são aquelas que mais se assemelham ao fenômeno perspéctico assimilado pelo olho humano. Elas ocorrem quando o observador não está situado no infinito, e, portanto todas as retas projetantes divergem dele”.

O objetivo da perspectiva cônica, também chamada de central ou linear, “[...] é combinar linhas horizontais e verticais, com linhas que convergem a um único ponto, na linha do horizonte ou acima dela, criando o centro focal. Este tipo de perspectiva constrói espaços cúbicos em forma de pirâmide mostrando o teto, o chão, as paredes laterais e a parede de fundo, só não mostra a parede em que supostamente o observador se encontra”. (Santos, 2006, p. 63).

De acordo com Canotilho (2005), a perspectiva central ou cônica pode subdividir-se em perspectivas rigorosas e não-rigorosas.



## **Perspectiva Rigorosa Normal**

“A perspectiva rigorosa normal cônica é determinada por um ou dois pontos de fuga (paralela e oblíqua). É o campo específico do mundo artístico, por excelência”. (CANOTILHO, 2005, p.51).

Ainda segundo Canotilho, ao falarmos em perspectiva rigorosa central, é necessário definirmos alguns conceitos básicos presentes nesta perspectiva:

### **a) Linha do Horizonte:**

A linha do horizonte é uma linha que passa à altura dos nossos olhos e que delimita o espaço de visão. É a linha imaginária onde o céu parece encontrar-se com a terra e “[...] que separa o lado superior e inferior da visão. É também o local onde se localiza o Ponto de Fuga”. (CARRION, 2005). Devemos considerar a linha do horizonte posicionada sempre no nível dos olhos do observador.

### **b) Ponto de Vista:**

O ponto de vista, ou ponto de observação, é o ponto de onde divergem os raios projetantes de uma perspectiva. Segundo Canotilho (2005) o ponto de vista “... está no centro do olho, devendo ser sempre fixo, durante a observação, para não se produzirem deformações”.

### **c) Pontos de Fuga:**

É o ponto situado sobre a linha do horizonte, em concordância com as linhas e planos do topo.(CANOTILHO, 2005, p. 69). É o ponto para o qual convergem as arestas laterais de profundidade, e que pertence á linha do horizonte. Poderá haver casos em que teremos mais de um pontos de fuga sobre a linha do horizonte, assim como pontos de fuga fora da mesma.

Dentro da perspectiva rigorosa normal, Canotilho (2005) ainda destaca dois tipos de perspectiva: a perspectiva paralela e a perspectiva oblíqua:

- **Perspectiva paralela:** verifica-se na projeção que a figura tem suas faces em posição ortogonal em relação ao observador, podendo existir, portanto, somente um ponto de fuga, pois as retas e os planos dirigem-se unicamente para um ponto na linha do horizonte.
- **Perspectiva oblíqua:** verifica-se agora, que as faces da figura encontram-se em posição oblíqua, dirigindo-se para dois pontos de fuga.

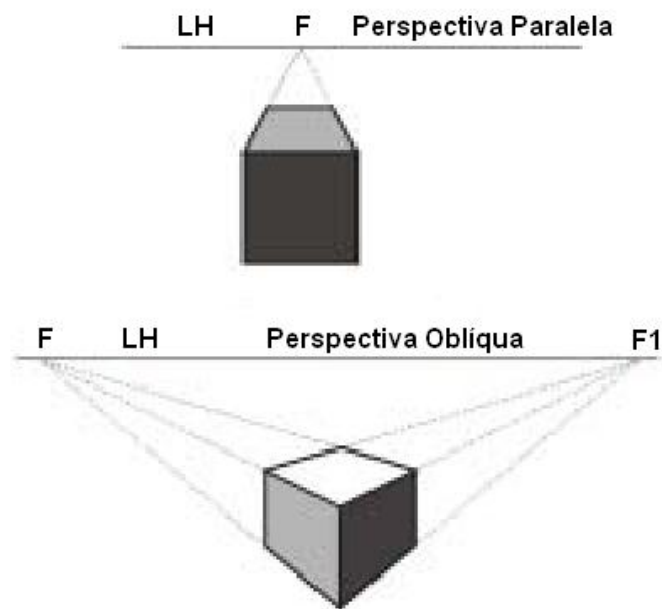


Figura 16. Perspectivas rigorosas normais paralela e oblíqua.

### Perspectiva Rigorosa Vista de Cima ou de Baixo

É uma perspectiva rigorosa que possui, geralmente, três pontos de fuga, sendo que o terceiro é colocado abaixo ou acima, e fora da linha do horizonte. É uma perspectiva que implica uma grande morosidade e dificuldade na determinação. Geralmente é empregada no mundo da Arquitetura e da Engenharia, para divulgar e publicar grandes projetos. (CANOTILHO, 2005).

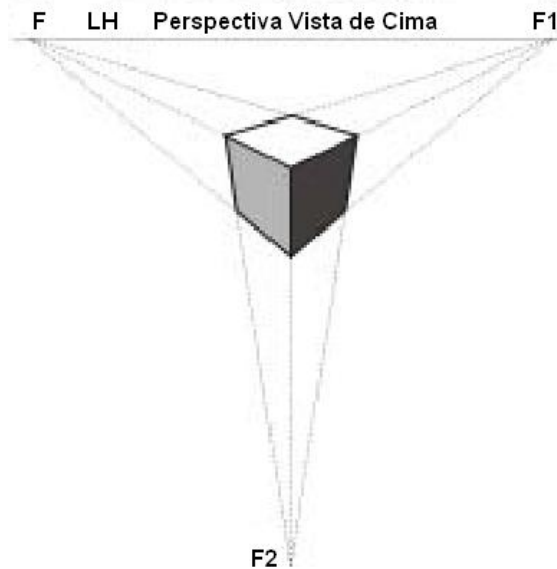


Figura 17. Perspectiva rigorosa vista de cima.

### Perspectivas Não-Rigorosas

A perspectiva não-rigorosa é uma perspectiva cônica, ou seja, as retas projetantes partem do observador, porém a projeção obtida é distorcida em relação à uma projeção rigorosa. A perspectiva não-rigorosa mais encontrada é a perspectiva curva.

“A perspectiva curva, ou perspectiva curvilínea é uma técnica de traçado da perspectiva que visa aproximar-se da imagem retinal (projetada na esfera ocular), mais do que a perspectiva tradicional, cujo limite é de  $40^\circ$  (de  $-20^\circ$  à  $+20^\circ$ ). Ela extrapola a construção da imagem até representar um ângulo de visão de  $180^\circ$ , ou podendo inclusive representar toda a circunferência ao redor do observador. A perspectiva curva corrige o problema da perspectiva linear, que considera apenas a redução em profundidade dos objetos, esquecendo-se da redução lateral. De acordo com Leonardo da Vinci: a perspectiva curvilínea, que esclarece as distorções na largura, corresponderia mais aos efeitos da visão”. (WIKIPÉDIA<sup>5</sup>).

<sup>5</sup> <http://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective> Acesso em 16 jan. 2007.

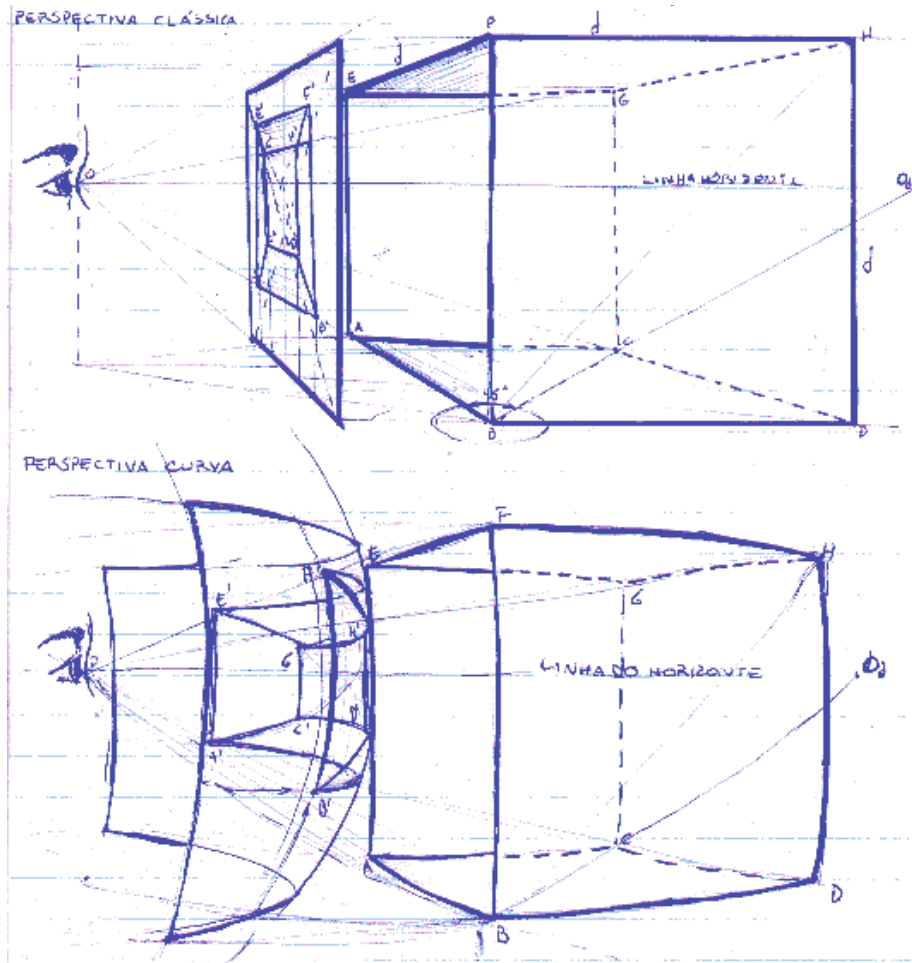
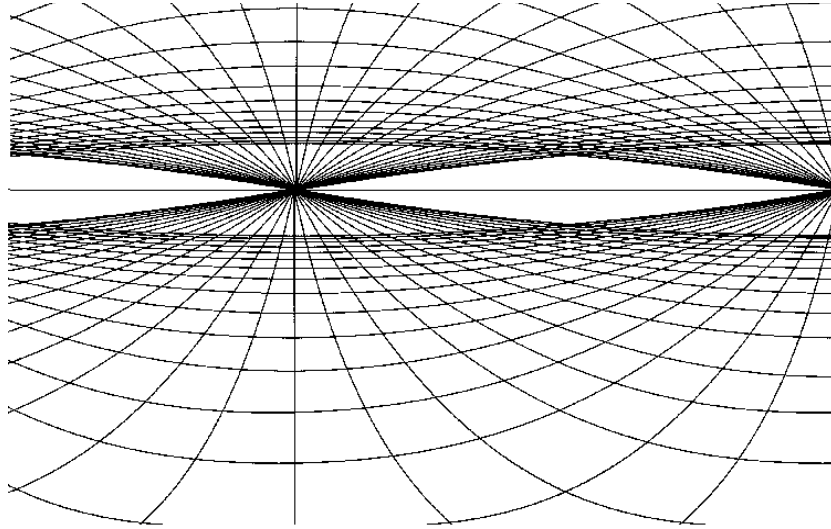


Figura 18. Comparação entre a perspectiva clássica e a perspectiva curva.

Como em uma perspectiva tradicional, as linhas de profundidade convergem para um ponto de fuga central, e permanecem retilíneas na projeção. Em contrapartida, todas as linhas horizontais da figura convergem lateralmente para os seus pontos de fuga respectivamente à direita e à esquerda do ponto de fuga das linhas de profundidade, tomando a forma de arcos de circunferência.



Figuras 19. Linhas horizontais e de profundidade em uma perspectiva curva.



Figura 20. Entrée de l'empereur Charles IV à Saint-Denis (Jean Fouquet, 1455-1460).

## 2.2 As Figuras Impossíveis

De acordo com Fink (1991), “quando um observador vê uma figura bidimensional no papel, interpreta-o freqüentemente como uma figura tridimensional”. Por exemplo, a maioria das pessoas ao ver uma figura semelhante à fig. 21, diriam que trata-se de um cubo. Poucos diriam tratar-se de dois quadrados ligados por linhas diagonais ou um quadrado cercado por figuras planas. Entretanto, estas interpretações são tão válidas quanto a interpretação tridimensional. (FINK, 1991).

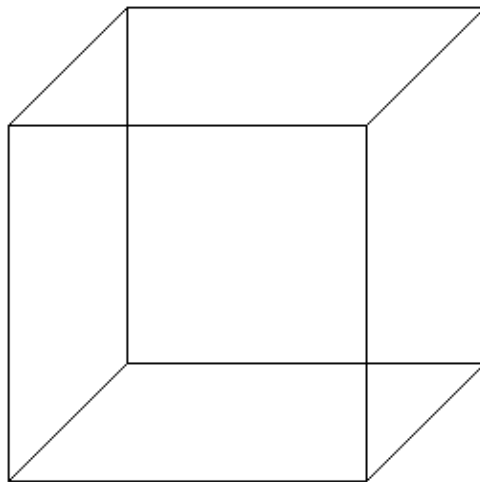


Figura 21. Um cubo.

Esta insistência em uma visão tridimensional das figuras planas pode nos conduzir a interessantes problemas. Por exemplo, a fig. 22, à primeira vista, aparenta ser uma figura tridimensional, mas suas propriedades parecem mudar dependendo de como é visto. Analisando pelo lado direito, parece-nos um objeto com dois prolongamentos, entretanto, analisando pelo lado esquerdo, aparenta ser um objeto com três prolongamentos, e não dois. Quando o objeto inteiro é visto de uma só vez, parece comutar entre ter dois e três prolongamentos. Esta impossibilidade confunde a mente. (FINK, 1991).

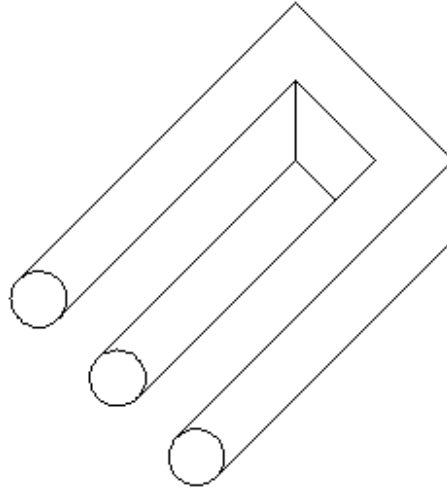


Figura 22. Tridente bi-prolongado.

O fascínio aqui é que os desenhos são interpretados como a representação dos objetos, mas os objetos representados não poderiam ser construídos pois a limitação espacial seria contraditória. (WADE, 1980, apud FINK, 1991).

“[...] a figura utiliza regras pictóricas para criar a ilusão tridimensional, mas quebra algumas dessas regras para tornar o objeto impossível de se construir. Que regras são seguidas e quais são quebradas determina a força das figuras impossíveis. Uma figura que não siga algumas das regras pictóricas aparenta ser plana. Inversamente, uma figura que siga todas as regras pictóricas será representada facilmente em três dimensões na mente do observador”. (FINK, 1991).

A fim de compreender as figuras impossíveis, nós devemos primeiramente compreender as representações bidimensionais de objetos tridimensionais. Uma variedade de regras podem ser aplicadas para dar forma à representação tridimensional de uma determinada figura. Souza (2004), citando Hoffman (2000), afirma que não se constrói profundidade ao bel prazer, mas de acordo com regras. Estas regras levam-nos a construir profundidade em determinadas figuras, mas nos dificulta fazê-lo em outras.

Entre estas regras podemos destacar a interposição, a altura do objeto em campo, a perspectiva linear, o gradiente de textura, o tamanho, o sombreamento e a perspectiva atmosférica. A combinação destas técnicas pode criar ilusões de

profundidade em uma figura. A má aplicação ou a perversão destas regras pode criar as figuras impossíveis, que parecem ter profundidade, porém são fisicamente impossíveis. (FINK, 1991)

A interposição, ou oclusão, é a sobreposição da imagem de um objeto sobre a imagem de outro. Quando isto acontece, nós julgamos que a imagem que está obscurecida esta por trás da outra imagem, e assim mais distante, afastada. Esta é uma das regras preliminares usadas na percepção da distância. Um retrato que não siga as leis da interposição não parece estar correto. (BIEDERMAN, 1987, apud FINK, 1991).

A posição vertical do objeto na imagem, ou altura em campo, é outra regra que pode ser usada para determinar profundidade. Objetos situados nas partes mais altas da figura aparentam estar mais distantes. Nosso campo visual normal se estende do chão abaixo e diante de nós até o céu por sobre e acima de nossas cabeças. O horizonte é aproximadamente a linha intermediária deste campo visual e, deste modo, os objetos que se encontram nas posições mais inferiores da figura aparentam estar mais próximos do observador. (FINK, 1991).

Uma outra característica comum em nosso ambiente é a perspectiva linear. Seu exemplo mais comum são os trilhos paralelos do trem que parecem se encontrar em um ponto distante. Um desenho que mostre as linhas que se encontram no horizonte parecerá ter profundidade devido este efeito. O tamanho é uma regra muito importante para a percepção da distância. Os tamanhos relativos de dois objetos determinam qual nós vemos como sendo o mais próximo. Também o tamanho familiar de um objeto influencia a distância em que parece ser colocado. Por exemplo, o retrato de um elefante e de um rato do mesmo tamanho pareceria como se o elefante estivesse muito mais distante do que o rato. (FINK, 1991).

O gradiente de textura refere-se à textura das superfícies que se tornam mais grosseiras perto do observador, e mais finas quando encontra-se mais distantes. As figuras podem explorar esta regra para criar a ilusão de profundidade. O sombreamento em uma figura também pode dar uma ilusão de profundidade. Ele dá informações sobre as partes de um objeto que se projeta ou



se quer inserir na figura, e dá a impressão de solidez. As regiões escuras são interpretadas como sendo mais distantes da fonte de luz do que as regiões claras. Em quase todos os casos é considerado que a fonte de luz encontra-se acima e atrás do observador, deste modo, as regiões mais escuras aparentam estar mais distante do observador. A quantidade de contraste determina o grau de profundidade visto na figura. (BERBAUM, THARP & MROCZEC, 1983 apud FINK, 1991)

A última regra que nós usamos para dar a noção de distância em uma figura é a perspectiva atmosférica, “[...] termo que denota os meios utilizados para obter-se numa pintura a noção de profundidade ligada ao efeito visual produzido pela atmosfera, pelos quais os objetos aparentam ser tão mais azulados e mais pálidos quanto mais distantes encontram-se do observador”. (CHILVES, 2001, p.405 apud SANTOS, 2006).

Veremos agora algumas das figuras impossíveis mais utilizadas por M. C. Escher em seus trabalhos, destacando-se as duas de maior influência: o triângulo e Penrose e a escada de Penrose.

### **2.2.1 O Triângulo de Penrose**

O triângulo de Penrose, também conhecido como tribarra, tri-bar ou triângulo impossível, é uma figura impossível criada pelo artista sueco Oscar Reutersvärd, em 1934. O Matemático Roger Penrose o popularizou na década de 1950, descrevendo-o como "impossível em sua forma pura". Aparece proeminentemente nos trabalhos do artista M.C. Escher. (WIKIPÉDIA<sup>6</sup>).

Uma figura é chamada impossível quando “uma contradição em nossa interpretação é observada mas não resulta em nossa rejeição a ele em favor à consistência.” (DRAPER, 1978, apud CERF). Um objeto representado é dito como figura impossível quando nossa mente tenta interpretá-lo como um objeto tridimensional no espaço euclidiano, com bordas retas e faces planas, em vez de

---

<sup>6</sup> [http://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo\\_de\\_Penrose](http://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Penrose) Acesso em 20 jan. 2007.

interpretá-lo, por exemplo, como um objeto bidimensional extraído do plano do papel (que é perfeitamente possível). (CERF).

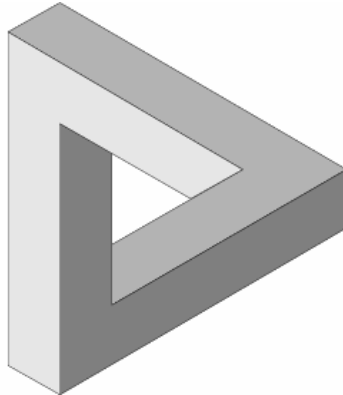


Figura 23. Triângulo impossível de Penrose.

Há diversas maneiras de construirmos uma figura geométrica real que seja vista como o triângulo de Penrose de um determinado ponto de vista. Uma delas consiste numa construção cujas faces do sólido giram em torno de seu próprio eixo, como podemos ver na figura abaixo.

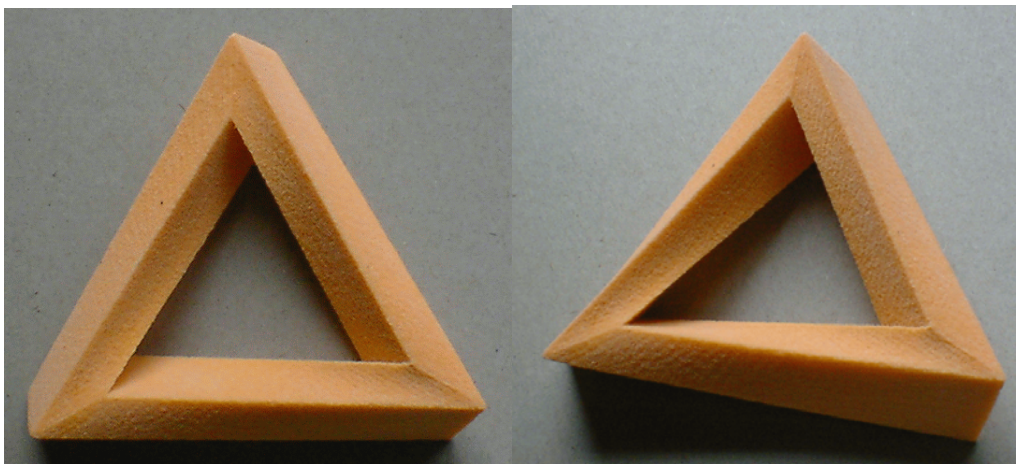


Figura 24. Triângulo de Penrose sob dois pontos de vista diferentes.

Uma outra alternativa de construção consiste manter dois lados do triângulo ortogonais, enquanto o terceiro, cuja projeção torna-se ortogonal em apenas um ponto de vista específico, faz a ligação entre estes.

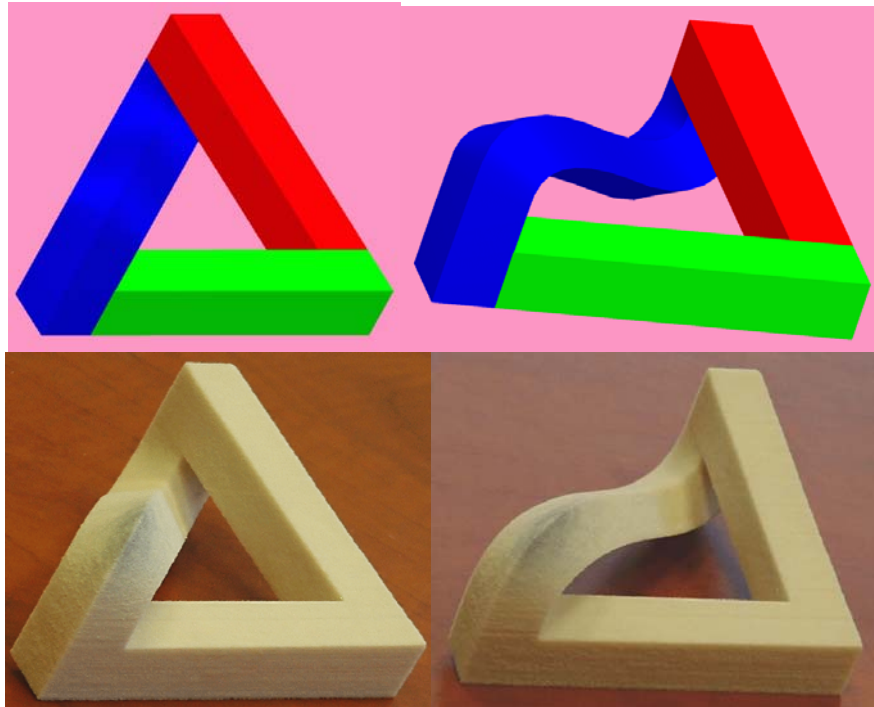


Figura 25. Alternativa para a construção do Triângulo de Penrose, sob dois pontos de vista (construção virtual e real).

Como uma variante do caso acima, podemos ter todos os lados do triângulo sendo não ortogonais, como o construído por Mathieu Hamaekers.

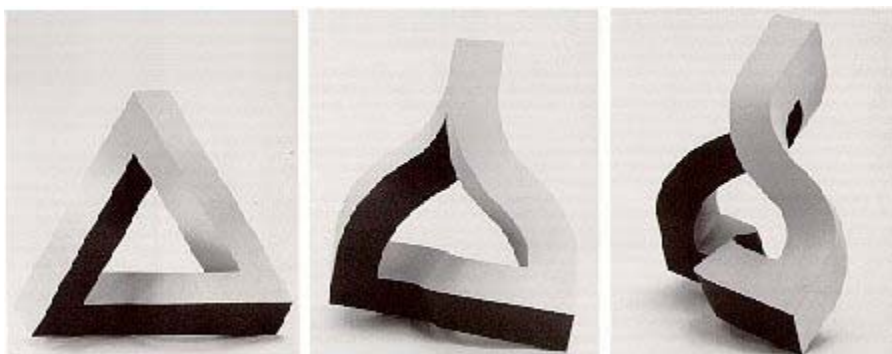


Figura 26. Triângulo Impossível criado por Mathieu Hamaekers.

Podemos também optar por uma construção onde todos os lados do triângulo sejam ortogonais entre si, não havendo ligação entre suas extremidades, e que somente em um único ponto de vista eles sejam vistos como um triângulo de Penrose.



Figura 27. Foto de um triângulo impossível por Bruno Ernst.

### 2.2.2 A Escada de Penrose

A escada de Penrose é uma figura impossível desenvolvida por Lionel Penrose e seu filho Roger Penrose e pode ser vista como uma variação do triângulo de Penrose. É uma representação bidimensional de uma escadaria na qual suas escadas fazem quatro curvas de 90 graus em sentido ascendente ou descendente, gerando um ciclo contínuo, de modo que uma pessoa as pudesse subir para sempre sem nunca alcançar sua parte mais elevada. Isto é claramente

impossível em três dimensões; a figura bidimensional consegue este paradoxo distorcendo a perspectiva. (WIKIPÉDIA<sup>7</sup>).

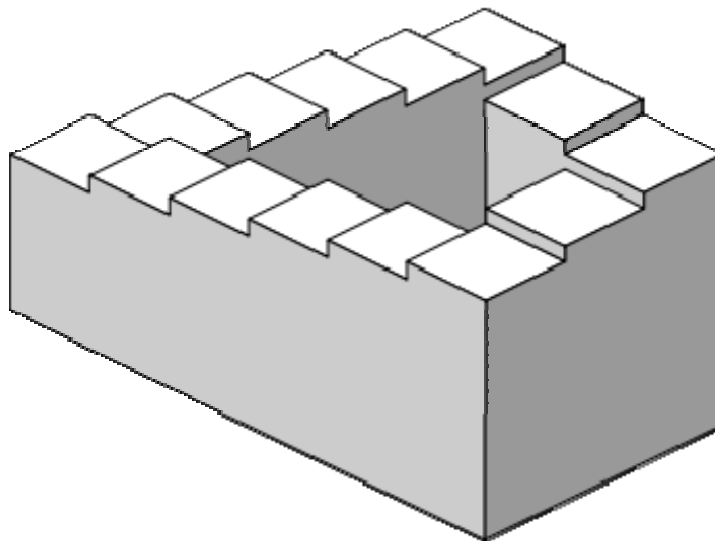


Figura 28. A escada de Penrose.

A escada de Penrose “[...] é uma ilusão ótica inteligente, que utiliza a perspectiva para dar ao observador a impressão de que a escadaria retratada é infinita. É infinita não no sentido de que têm infinitos degraus, mas no sentido de que não possui nenhuma extremidade, isto é, cada degrau é suscedido por um degrau mais alto e antecedido por um degrau mais baixo”. (SHUCKER, 2000).

Em um modelo real, a escadaria é separada em uma de suas curvas, mas não podemos ver esta abertura porque o sistema visual da figura supõe que esta esteja sendo observada de um ponto específico de vista. Deste ponto supõe-se que as escadas estão juntas. (SECKEL, 1997).

---

<sup>7</sup> [http://en.wikipedia.org/wiki/Penrose\\_stairs](http://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_stairs) Acesso em 24 jan. 2007.

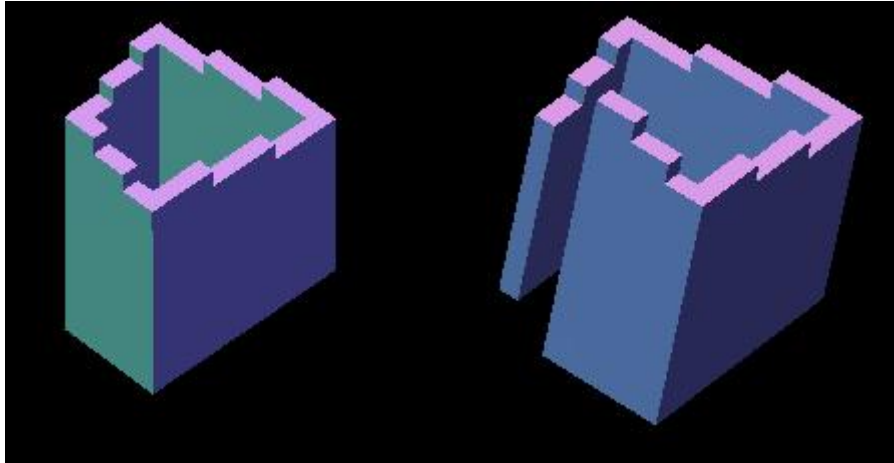


Figura 29. Escada de Penrose sob dois pontos de vista diferentes.

Como é obtida a ilusão? Na fig. 30 podemos ver como a escadaria é construída. Podemos observar nesta figura que a escada tem um começo e uma extremidade desobstruídos. Observe também que o primeiro nível (mostrado em vermelho) parece estar muito mais elevado em uma extremidade que em outra. As extremidades somente parecerão estar unidas se forem vistas de um ângulo particular. (SHUCKER, 2000).

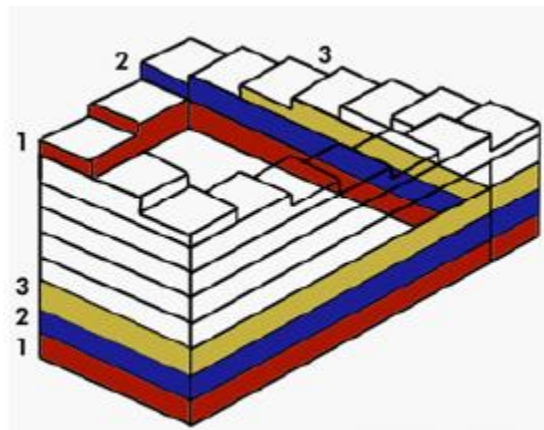


Figura 30. Escada de Penrose e seus níveis.

Tanto a escada quanto o triângulo de Penrose inspiraram Escher em alguns de seus mais famosos trabalhos. O uso das figuras impossíveis e da perspectiva nos trabalhos de Escher será a tônica do próximo capítulo.

## CAPÍTULO III

Neste capítulo será abordado o emprego das técnicas de perspectiva e da construção de figuras impossíveis por Escher em alguns de seus mais conhecidos e intrigantes trabalhos.

### 3.1 Escher e a Perspectiva

O uso de regras de perspectiva na Arte proporciona ao trabalho uma ilusão espacial, uma tridimensionalidade contida em uma figura plana. Escher observou com todo cuidado estas regras da perspectiva clássica quando da composição de suas gravuras; e essa é a razão porque elas dão um efeito tão sugestivo de espaço.

#### 3.1.1 Nadir e Zênite

A perspectiva clássica prescreve que feixes de linhas paralelas, que correm no sentido da figura, sejam desenhadas como linhas paralelas, portanto, sem nenhum ponto de fuga. Porém, se estivermos ao pé de uma torre, vemos as linhas verticais convergirem num ponto. Isto também resulta da perspectiva clássica, porque o quadro já não é mais perpendicular à terra. Se colocarmos o quadro horizontalmente e olharmos para baixo, veremos todas as linhas verticais convergirem num ponto sob os nossos pés: o nadir. (ERNST, 1991). Outrossim, se estivermos sob um arranha-céu, veremos que suas linhas horizontais também encontrarão-se em um ponto: o zênite.

Dois exemplos específicos destes dois pontos de fuga, nadir e zênite, podem ser encontrados, respectivamente, nas obras Torre de Babel (fig. 31.a) e Ex-líbris (fig. 31.b) de Escher.

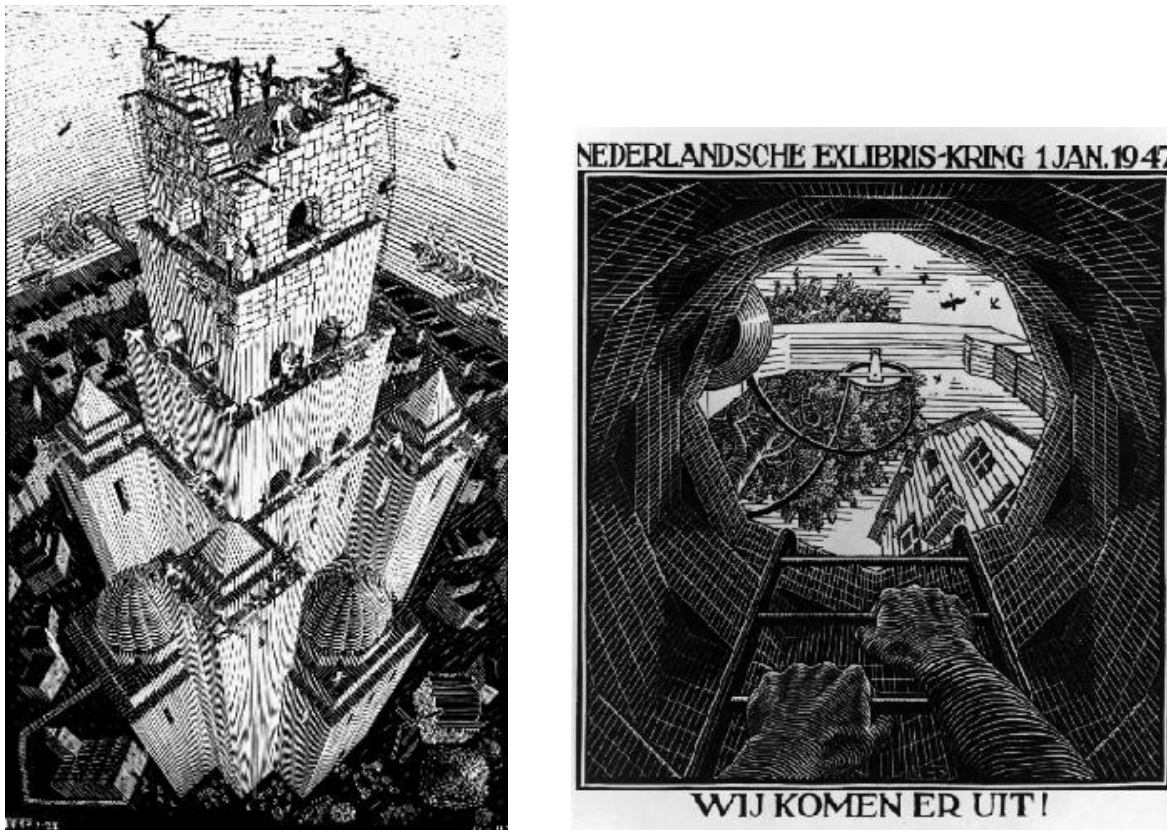


Figura 31. a) Torre de Babel, Xilogravura, 1928 . b) Ex-líbris, Xilogravura, 1947.

Como podemos ver em ambas as gravuras, tanto o nadir como o zênite estão sobre a linha do horizonte.

Se traçarmos algumas linhas que converjam num ponto, então este ponto pode representar muita coisa, por exemplo, o zênite, o nadir, ponto de distância, etc... Isso depende completamente da relação em que está. (ERNST, 1991. p.43).

Para demonstrar esta relatividade dos pontos de fuga, Escher produziu as obras Um outro mundo I e II (1946 e 1947). Em Um outro mundo I, vemos uma perspectiva com um ponto de fuga central. Em relação às janelas à esquerda e à direita, este ponto representa um ponto de distância. Porém, em relação à janela acima, este ponto refere-se ao nadir, enquanto à janela abaixo, ao zênite. Escher fica descontente com este trabalho, pois com este túnel sem fim, o ponto de fuga fica obscurecido, além de ser necessário quatro planos para representar três paisagens. Em uma nova gravura, Escher elimina estas características



incômodas. Um outro mundo II não possui mais o longo túnel, mas sim três pares de janelas quase iguais, dando mais equilíbrio à cada ponto de vista relativo. Segundo Ernst (1991, p. 46), “[...] encontramos-nos num espaço estranho, onde se pode a bel-prazer confundir em cima com embaixo, direita com esquerda, frente com trás, conforme quisermos olhar por uma ou outra janela”.

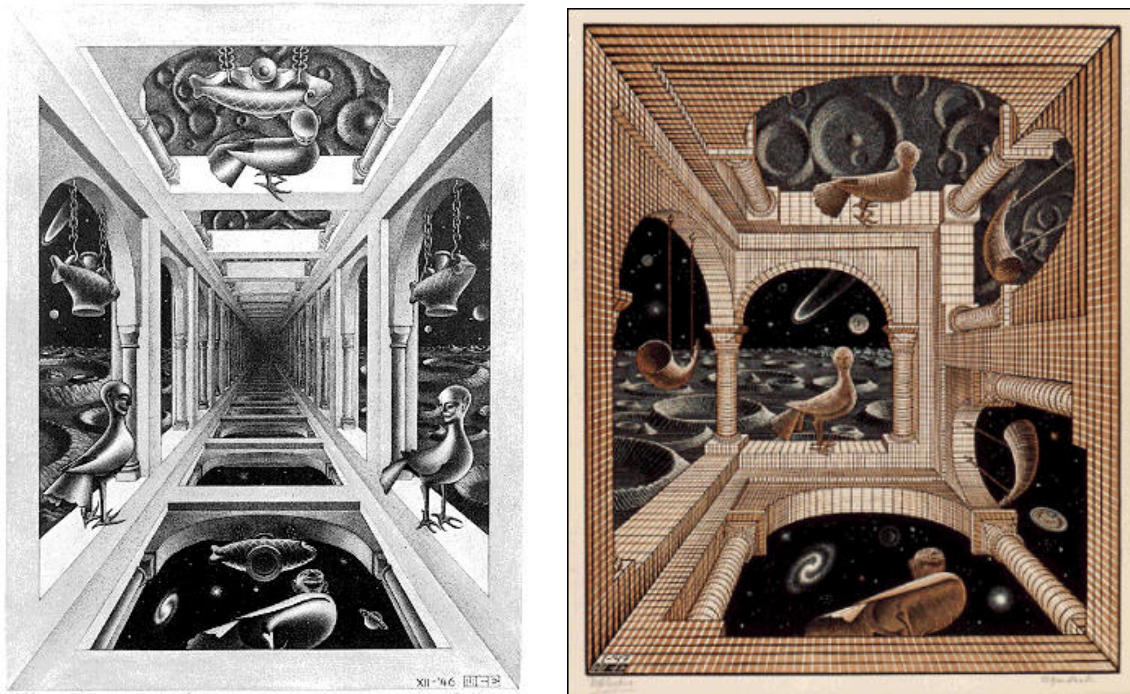


Figura 32. a) Um outro mundo I, Gravura, 1946. b) Um outro mundo II, Xilogravura, 1947.

### 3.1.2 Relatividade

Relatividade é uma litografia de 1953 (fig. 33) na qual podemos ver um mundo onde a própria gravidade é tida como relativa.

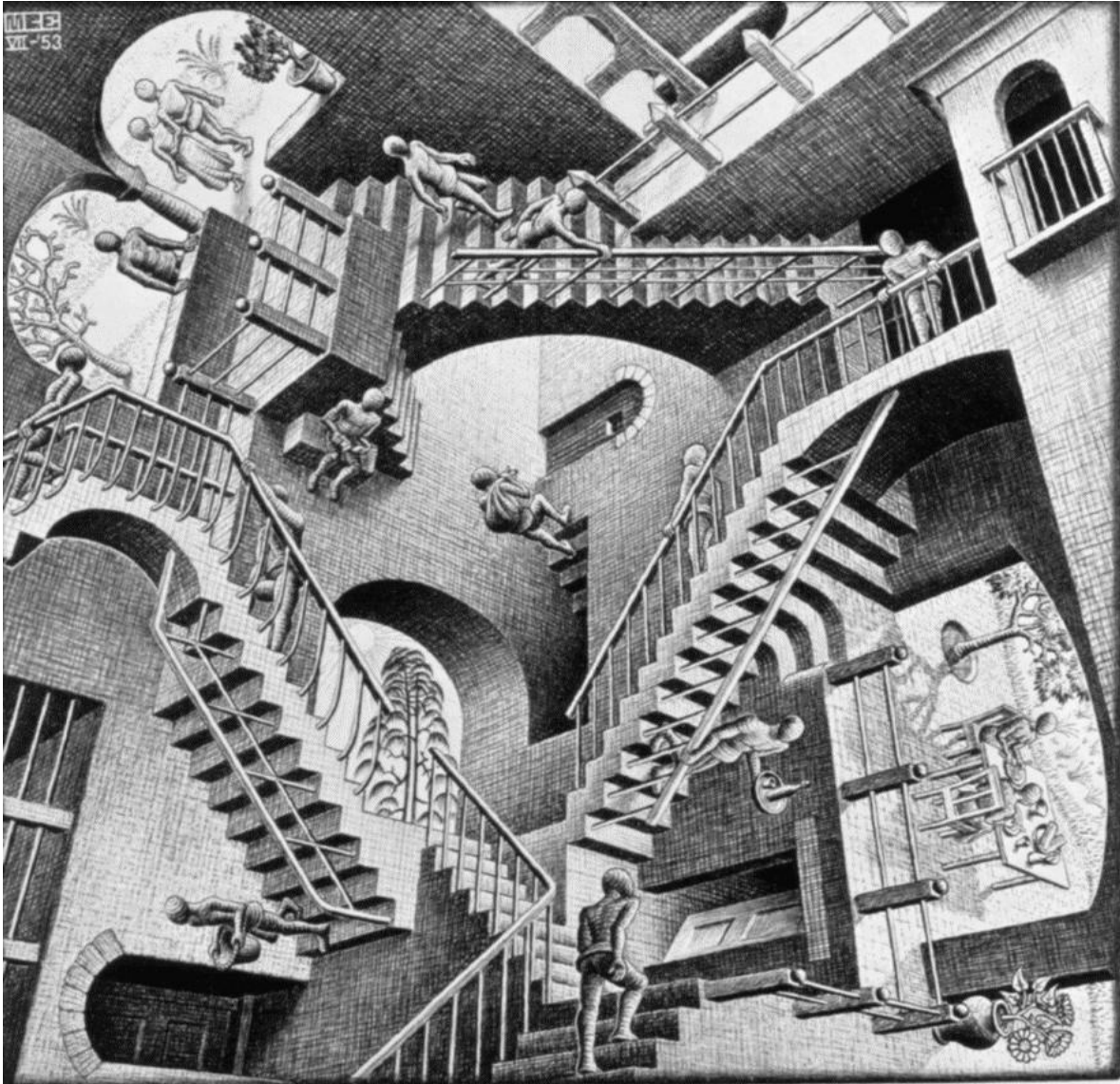


Figura 33. Relatividade, Litografia, 1953

Há três mundos distintos nesta litografia, três perspectivas diferentes. E tudo depende do nosso olhar.(PEREIRA, 2004). Que mundo são esses? Segundo o professor Nuno Crato (apud PEREIRA, 2004), “[...] se a olharmos na posição certa (com a assinatura do artista no canto superior esquerdo), veremos o mundo dos que andam direitos, o dos que andam deitados para a esquerda e o dos que estão deitados para a direita”. E continua: "Qualquer desses mundos é coerente e a perspectiva está perfeitamente traçada - se isolarmos um pedaço podemos considerar apenas uma das perspectivas".

Escher oferece, com os jogos de perspectiva, um meio de visualização do perspectivismo que se contrapõe ao absoluto. Conceitos do cotidiano como em cima e em baixo, dentro e fora, são relativos e alterados; relações absolutamente novas a partir de elementos habituais apresentam mundos ao mesmo tempo estranhos e possíveis. (OLIVEIRA, 2005).

Relatividade é uma litografia na qual “[...] há três pontos de fuga que ficam para além da imagem e que formam um triângulo equilátero de 2 metros de comprimento!” (ERNST, 1991. p.46). estes pontos de fuga podem ser percebidos neste estudo que Escher fez para Relatividade:

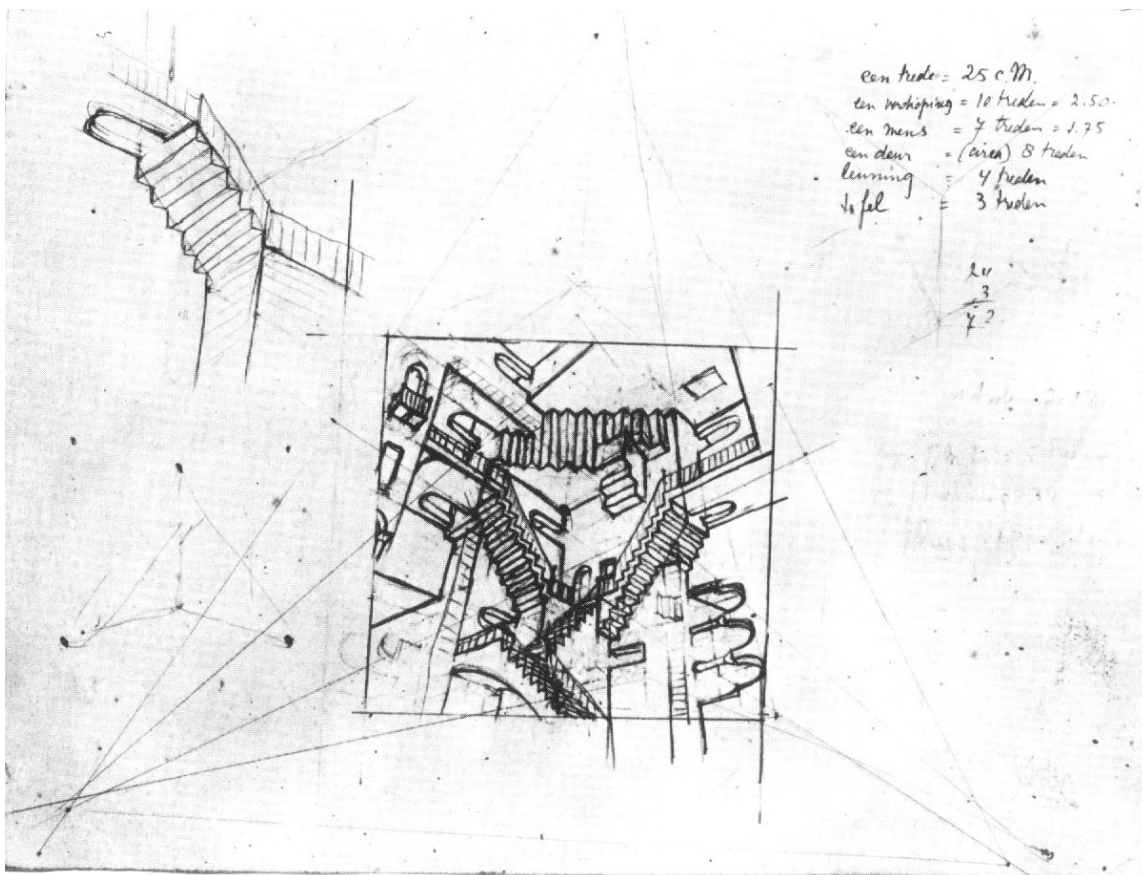


Figura 34. Estudo para Relatividade com três pontos de fuga, lápis, 1953.

"Três planos de gravitação agem aqui verticalmente uns sobre os outros. Três superfícies terrestres, vivendo em cada uma delas seres humanos, intersectam-se em ângulo reto. Dois habitantes de mundos diferentes não podem andar, sentar-se ou ficar em pé no mesmo solo, pois a sua concepção de horizontal e vertical não se conjuga. Eles podem, contudo, usar a mesma escada. Na escada mais alta das aqui representadas, movem-se, lado a lado, duas pessoas na mesma direção. Todavia, uma desce e a outra sobe. É claramente impossível um contacto entre ambas, pois vivem em mundos diferentes e não sabem, portanto, da existência uma da outra".(ESCHER<sup>8</sup>, 1994, p.15).

### 3.1.3 Novas leis para a perspectiva

Imaginemos um homem deitado sobre dois postes telegráficos a olhar para os dois fios paralelos (fig. 35a). Os pontos P e Q são os mais próximos dele. Ao olhar em frente, vê os dois fios convergirem para o ponto  $V_1$  (nadir). Ao olhar para trás, os dois fios convergem para  $V_2$  (zênite). Deste modo, a representação dos fios telegráficos em toda a extensão que vemos deverá ser o losango  $V_1QV_2P$  (fig. 35b). Mas não é isto o que percebemos. Não vimos a quebra em P e Q e por causa da continuidade, chegamos às linhas curvas, como na fig. 35c. (ERNST, 1991).

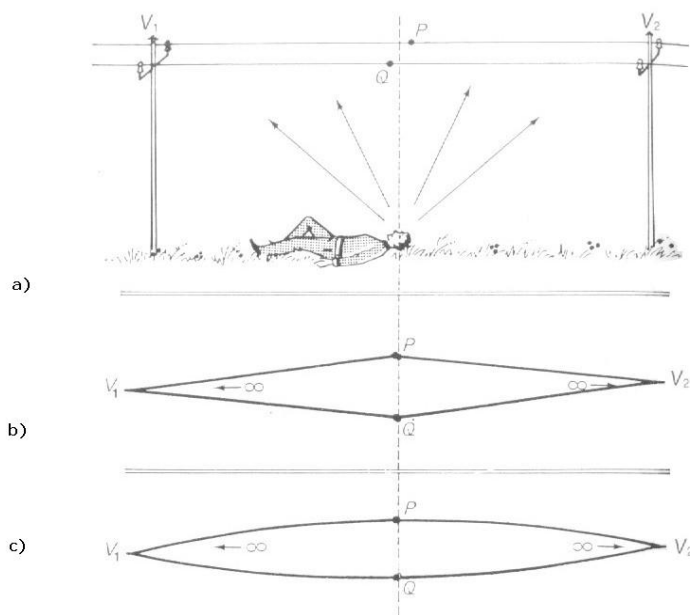


Figura 35. Efeito das linhas telegráficas.

<sup>8</sup> Citação extraída de <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/escher/relatividade.html>

Observemos agora a fig. 36a. O centro  $O$  é o olho do homem que está deitado sob os fios telegráficos. Quando ele olha para frente, pode ver representados os fios telegráficos como em um quadro ( $T_1$ ). Olhando um pouco para cima, o quadro também se movimenta ( $T_2$ ), ficando sempre perpendicular em relação ao seu olhar. Temos na realidade uma série de inúmeros quadros (fig. 36b). (ERNST, 1991).

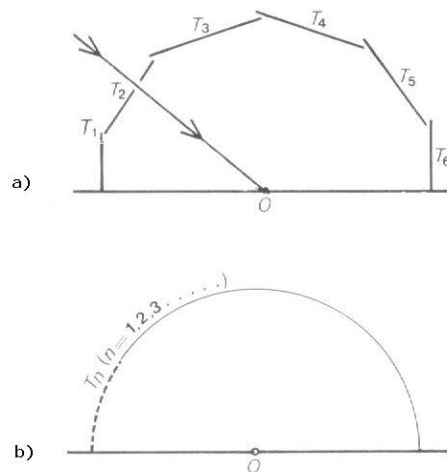


Figura 36. Deslocamento visual quadro-a-quadro.

A imagem no total torna-se então cilíndrica. A continuidade dos inúmeros quadros gera um cilindro onde a imagem dos fios telegráficos é projetada (fig. 37a). Podemos perceber dentro do cilindro duas meias elipses formadas pelas projeções dos fios. Ao cortarmos este cilindro e deixarmos plana a sua metade superior, vemos que estas meias elipses tornam-se curvas de aspecto senoidal (fig. 37b). Escher chegou ao mesmo resultado, porém através de construção intuitiva. (ERNST, 1991).

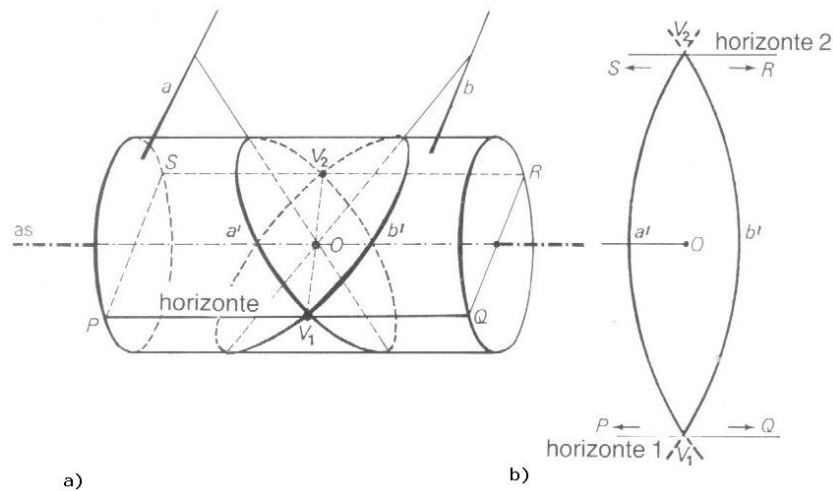


Figura 37. Projeção cônica das linhas telegráficas.

Escher utiliza estes feixes de linhas curvas, inseridos no contexto da relatividade dos pontos de fuga, em sua obra *Em cima e embaixo* (fig. 38), considerada por muitos como uma de suas melhores obras. Nela podemos visualizar a mesma imagem sob dois pontos de vista diferentes e simultâneos, onde todos os elementos presentes na parte superior estão presentes na inferior. Ao observarmos a parte superior, temos uma vista aérea, com todas as suas linhas verticais curvas e convergindo para o nadir, situado no centro da gravura. Vendo agora a parte inferior, temos os mesmos elementos presentes na parte superior, porém sob um novo ponto de vista: do chão, olhando para cima. Novamente encontramos as linhas verticais curvas, convergindo para o zênite, situado no centro da gravura.

O ponto central da figura tem duplo papel: representa simultaneamente o nadir e o zênite, idéia reforçada pela semelhança entre os ladrilhos do teto e do chão. “O ponto de fuga estabelece a ligação entre a imagem superior e a inferior sendo ocultada pelo ladrilho central que representa, simultaneamente, o teto da imagem inferior e o chão da imagem superior”. (MARTINHO, 1998, p.18).

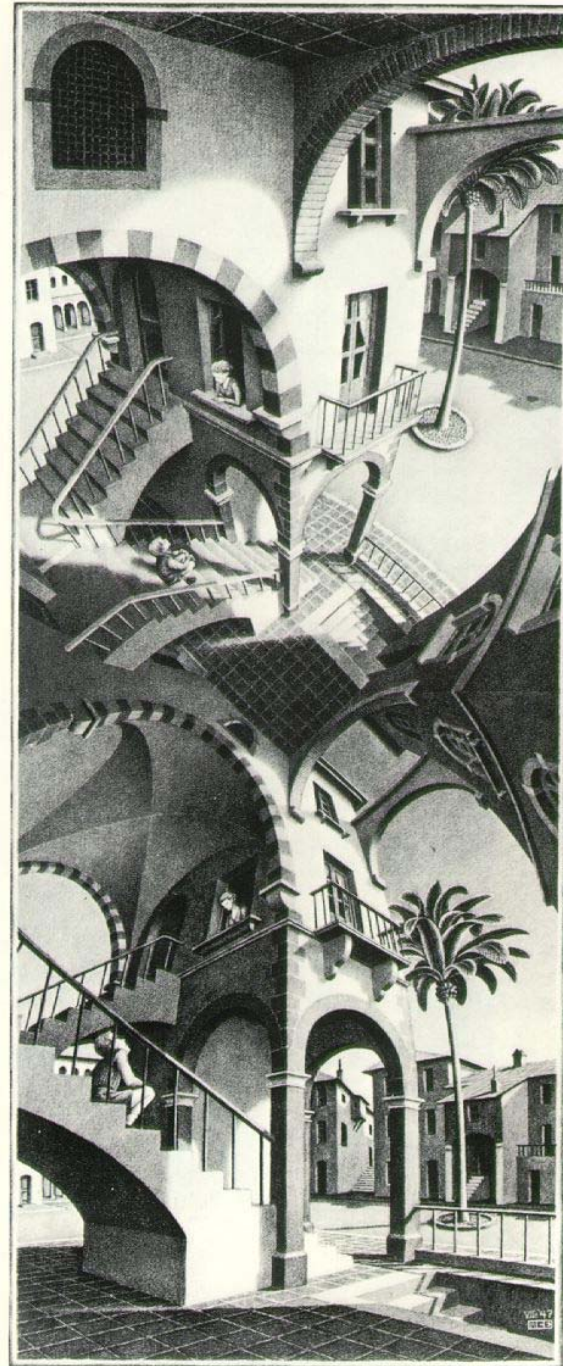


Figura 38. Em cima e embaixo, Litografia, 1947.

As linhas curvas até agora utilizadas são o resultado da projeção em um cilindro de retas ou horizontais ou verticais. Mas como será a representação cilíndrica se tivermos simultaneamente feixes de retas horizontais e verticais? Na fig. 39 podemos ver ambas as projeções no cilindro, além do formato das curvas com o corpo do cilindro desdobrado. “Cada linha que passa por um ponto de

intersecção no eixo vertical pode significar um horizonte e cada ponto de intersecção pode ser, segundo se quer, zênite, nadir ou ponto de distância". (ERNST, 1991, p.55)

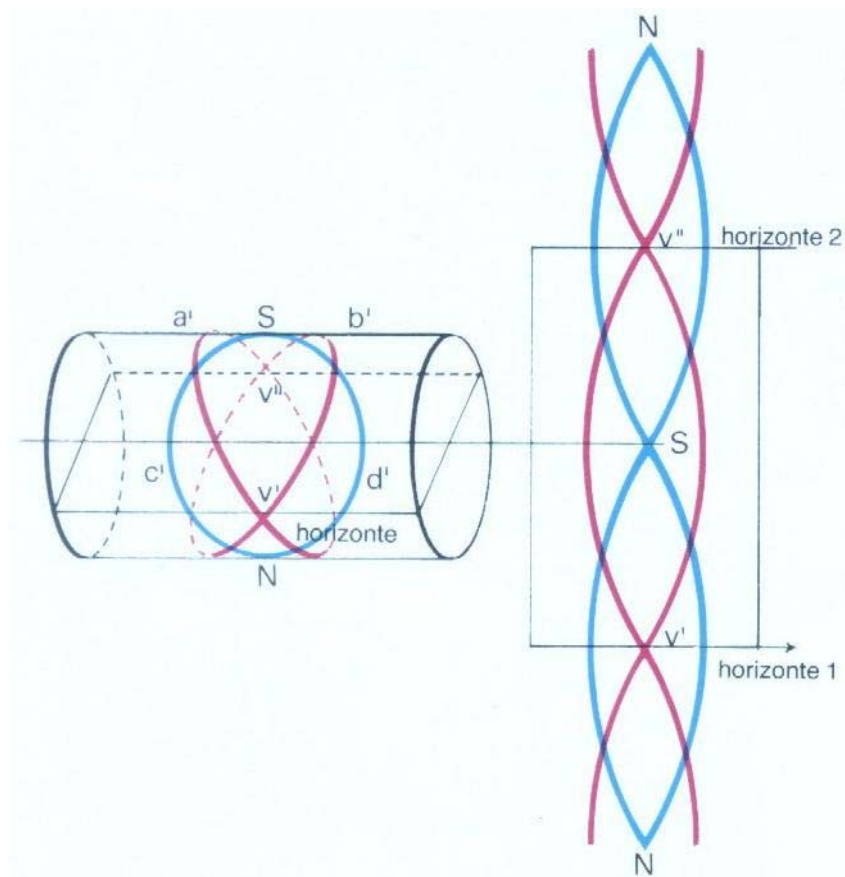


Figura 39. Linhas verticais e horizontais no corpo de um cilindro.

O uso deste sistema de linhas curvas foi utilizado por Escher em sua litografia Escadaria (fig. 40a). Nesta gravura podemos perceber três pontos de fuga, onde cada um deles pode representar o zênite, o nadir ou um ponto de distância. Por exemplo, para a criatura encontrada no centro da composição,  $V_1$  é ponto de distância, e  $V_2$  nadir (fig. 40b). Ainda segundo Ernst (1991, p.57), de acordo com a fig. 40b, "a zona entre A e B contém já todos os elementos essenciais. A parte superior resulta do fragmento entre A e B por meio de reflexão com escorregamento".



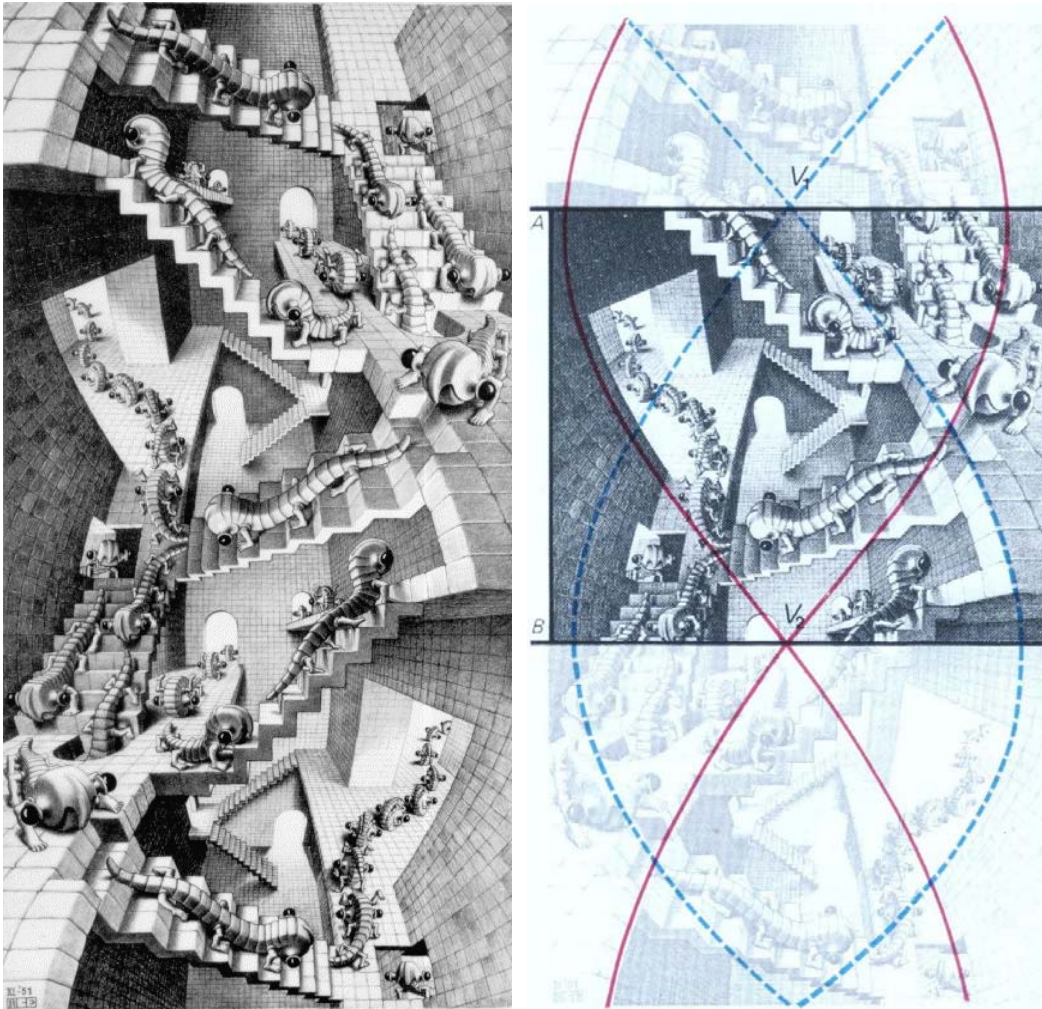


Figura 40. a) Escadaria, Litografia, 1995. b) Linhas verticais e horizontais utilizadas em Escadaria.

### 3. 2 Escher e as figuras impossíveis

Talvez a parte mais conhecida da obra de Escher seja a construção de estruturas impossíveis. São gravuras de estruturas que são impossíveis de serem efetivamente construídas, além de sua representação virtual e que, por sua sugestão tridimensional, provoca no observador uma tensão perceptiva imensa. (MARTINHO, 1998). Iremos agora ver, dentre a obra de Escher, três trabalhos que melhor ilustram a utilização destas estruturas impossíveis: Belvedere, Queda de Água e Subindo e Descendo.

Segundo Azevedo (2004, p.19),

“Escher tinha um propósito muito especial na hora de elaborar suas paisagens insólitas: fugir do óbvio. Ele sabia que uma situação impossível só causa impacto em quem a vê quando não é imediatamente perceptível. “Se você quer que algo impossível chame a atenção, primeiro você deve convencer a si mesmo e só então o seu público. [...] o elemento impossível deve ficar tão disfarçado que um observador desatento nem o perceberá”. dizia Escher.“

### **3.2.1 Belvedere**

Belvedere, litografia de 1958 (fig.41), mostra uma construção de arquitetura absolutamente impossível no mundo real. A obra “[...] apresenta uma estrutura arquitetônica incoerente que resulta da ligação impossível entre o piso superior e o inferior”. (MARTINHO, 1998, p.21). a gravura foi originalmente denominada de casa-fantasma, mas a atmosfera do desenho nada tinha de fantasmagórico, tendo então seu nome alterado.

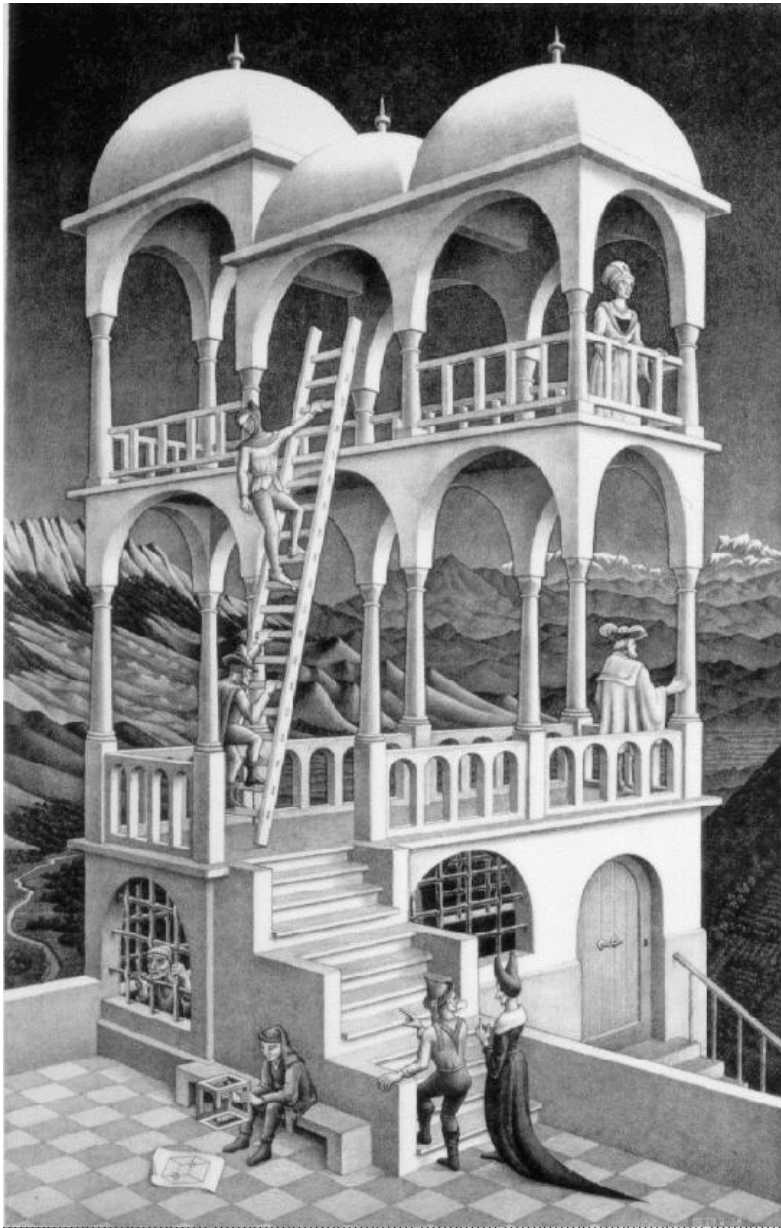


Figura 41. Belvedere, Litografia, 1958.

Segundo Martinho (1998), se dividirmos a gravura horizontalmente, na altura média de seus pilares, teríamos duas imagens perfeitamente aceitáveis. A tensão criada pela figura esta justamente na ligação entre seus pilares.

De acordo com Ernst (1991), a intenção fantasmagórica de Escher encontra-se na relação entre os pisos superior e inferior, que parecem perpendiculares entre si. Esta ortogonalidade dos pavimentos pode ser observada na maquete da fig. 42, onde vemos Belvedere em dois pontos de vista diferentes.

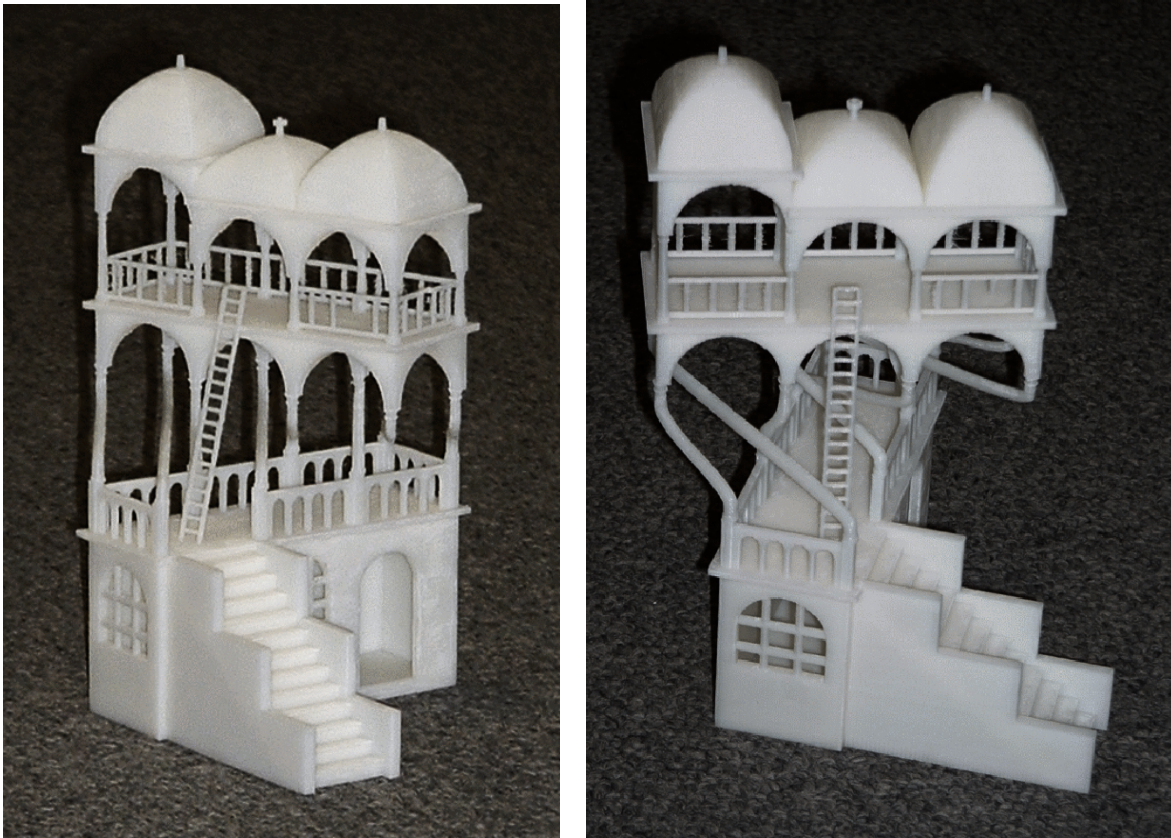


Figura 42. Maquete de Belvedere, sob dois pontos de vista distintos.

Além da junção entre as pilastras da construção, há outros pontos que nos deixam atônitos. Um deles é a escada de mão. Ao observarmos sua parte inferior, ela está situada dentro da estrutura, porém está apoiada superiormente na parede externa da construção, estando simultaneamente dentro e fora.

Outro detalhe que devemos observar é o objeto que a pessoa sentada está analisando (fig. 43). Ele está intrigado com o objeto e não percebe que a estrutura atrás de si possui o mesmo esquema de construção. Curiosamente, a solução surge descrita numa folha de papel pousada à sua frente.



Figura 43. Pormenor de Belvedere.

O objeto em questão é popularmente conhecido como “cubo impossível de Escher”. Ele consiste em um cubo, no qual duas de suas arestas são construídas de uma maneira especial: a aresta que deveria aparecer mais afastada está localizada à frente, assim como a aresta que deveria estar à frente, encontra-se afastada do observador. Existem inúmeras tentativas de construí-lo fisicamente, como nas figuras 44 e 45.

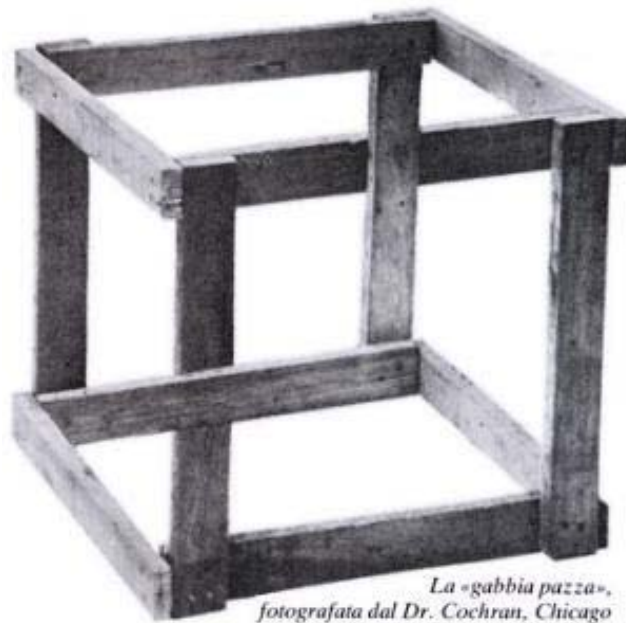


Figura 44. A “grade louca”, fotografada pelo Dr. Cochran, Chicago.

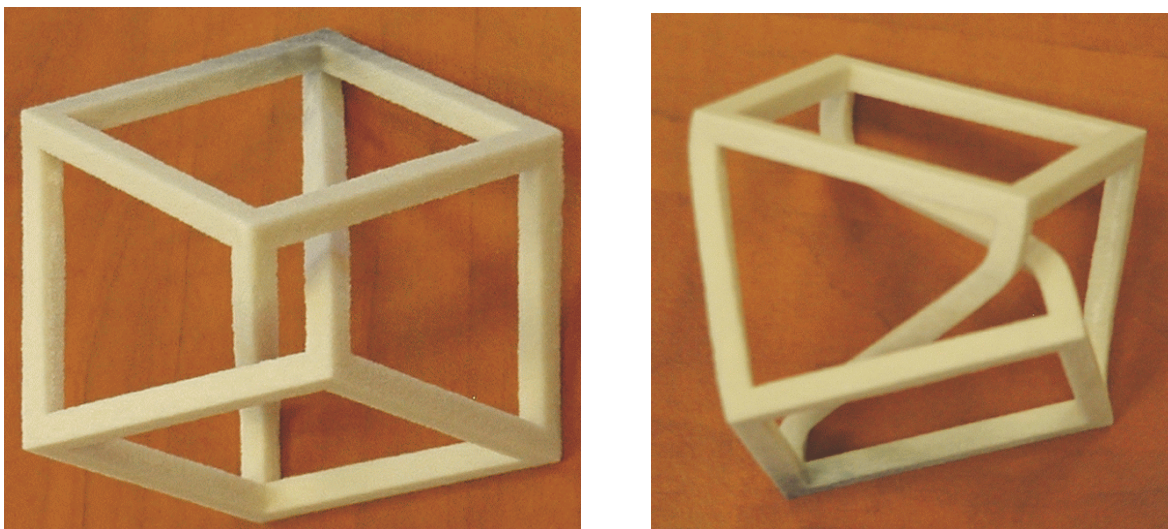


Figura 45. Maquete do cubo impossível sob dois pontos de vista distintos.

### 3.2.2 Queda de Água

A gravura Queda de Água (fig. 46) explora uma figura impossível bem conhecida na Matemática: o triângulo impossível de Penrose, visto no capítulo anterior. Nesta gravura podemos perceber dois triângulos impossíveis, que compõem o trecho por onde escorre a água, e que estão inseridos em um triângulo impossível maior, que abrange toda a estrutura. (MARTINHO, 1998)

De acordo com Ernst (1991, p.88),

“Escher viu a figura de Penrose exatamente na altura em que estava completamente ocupado em construir mundos impossíveis, e o tribar deu incentivo à produção da litografia Queda de Água, 1961. [...] ele tinha originalmente a intenção de desenhar três complexos colossais. Depois veio-lhe de repente a idéia de a água a cair poderia ilustrar ainda mais claramente a absurdidade do tribar”.

À primeira vista, o observador vê a água escorrer por uma calha de tijolos e durante sua queda movimentar uma roda de moinho, para logo continuar seu trajeto. Porém, este trajeto é justamente a mesma calha de tijolos de onde se originou a queda de água, fazendo este trajeto eternamente, como numa espécie de moto contínuo. (AZEVEDO, 2004).



Figura 46. Queda de Água, Litografia, 1961.

Assim como em Belvedere, as pilastras de sustentação são as responsáveis pela tensão causada pela gravura. A estrutura básica da composição é o triângulo impossível de Penrose (fig. 47). Além disso, há outros componentes na figura que acentuam seu efeito bizarro: o musgo exageradamente aumentado no pequeno jardim e os polígonos regulares sobre a torre. (ERNST, 1991).

Na fig. 47, podemos ver uma maquete de uma possível construção de Queda de Água, sob dois pontos de vista, bem como a localização do triângulo impossível.

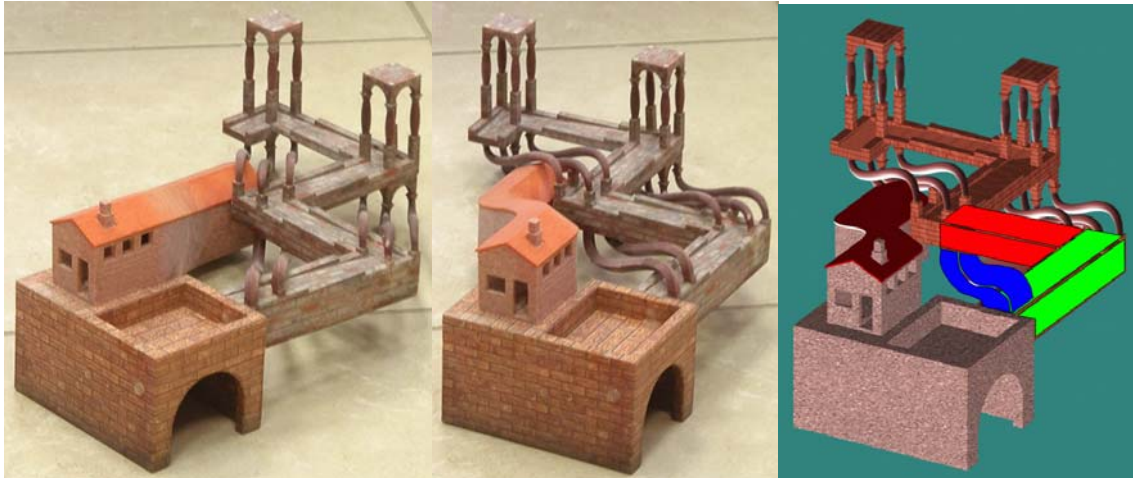


Figura 47. Maquete de Queda de Água sob dois pontos de vista e indicação do triângulo impossível.

### 3.2.3 Subindo e Descendo

Assim como na obra Queda de Água, Subindo e Descendo (fig. 48), litografia de 1960, é inspirada em outra figura impossível: a escada de Penrose. Como visto no capítulo anterior, a escada de Penrose consiste numa escadaria onde não podemos discernir qual o ponto mais alto ou mais baixo desta. Segundo Ernst (1991, p.90), em Subindo e Descendo “[...] somos confrontados com uma escada que tanto se pode subir como descer, sem que no entanto se consiga chegar nem acima, nem abaixo”.



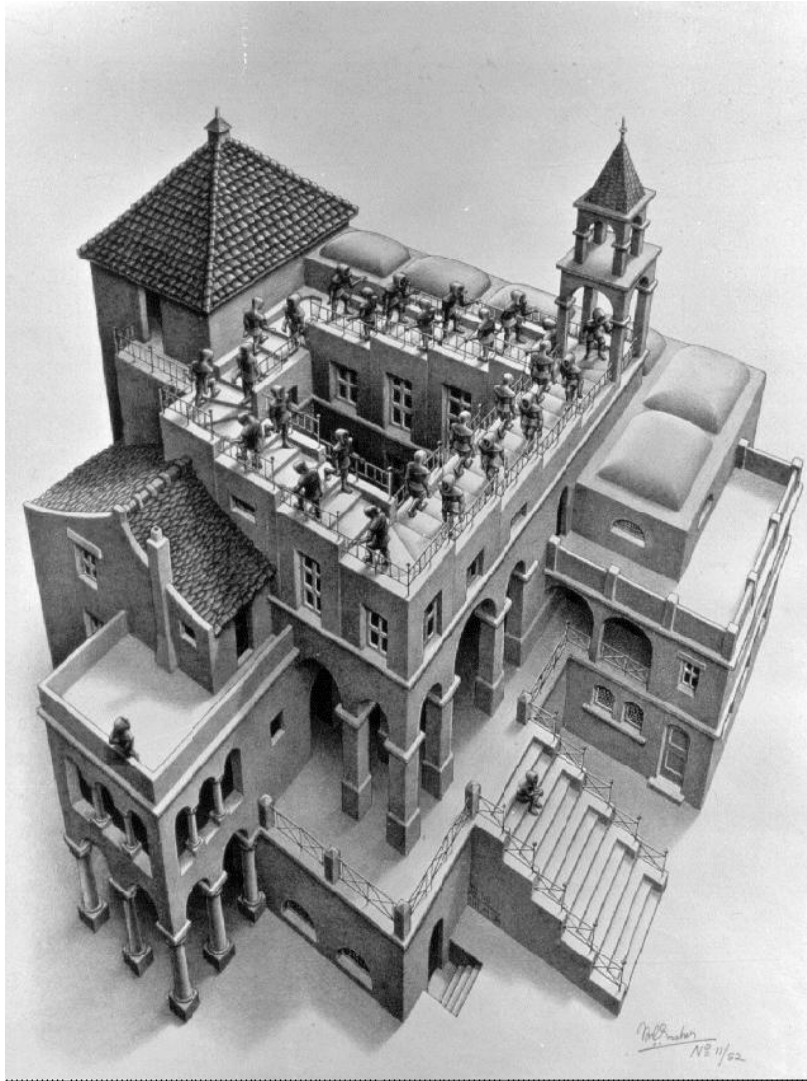


Figura 48. Subindo e Descendo, Litografia, 1960.

O efeito de ilusão da escadaria infinita está no fato de que toda a escadaria encontra-se num plano horizontal. Cada segmento desta não está em um plano horizontal, mas em espiral ascendente ou descendente.

Vamos, agora, analisar como podemos construir, segundo Ernst (1991), um modelo de representação para esta escadaria infinita num plano horizontal. Primeiramente, montamos o quadrilátero ABCD. No meio de cada lado, desenhamos uma pequena linha vertical. Para construirmos degraus ascendentes de A para B, basta traçarmos uma linha de A para a parte inferior do traço entre A e B, assim como uma linha da parte superior deste traço para B. Podemos repetir

este mesmo procedimento para criarmos degraus ascendentes de B para C (fig. 49a). Analogamente, poderemos criar os mesmos degraus de C para A, passando por D (fig. 49b).

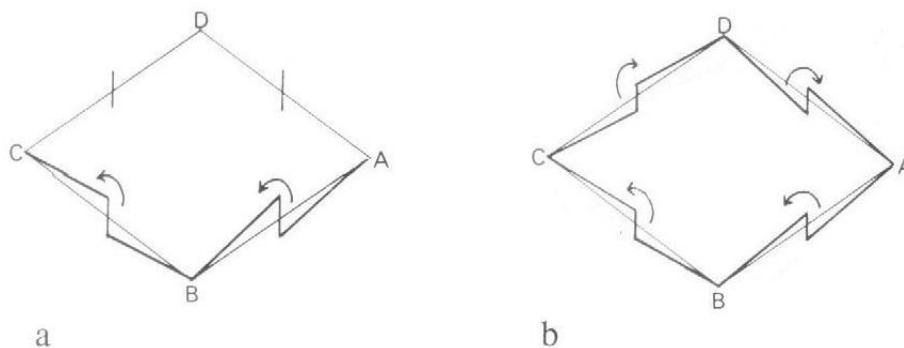


Figura 49. Construção de uma escada infinita.

Esta figura já é a estrutura básica para a construção da escadaria infinita. Porém, uma figura construída segundo este diagrama teria ainda uma deficiência: as linhas tracejadas que dão a direção das paredes laterais, em cima, à direita intersectam-se no ponto de fuga  $V_1$ , porém as demais linhas tracejadas encontram-se em  $V_2$ , abaixo, à direita, destruindo a idéia de uma figura desenhada corretamente em perspectiva (fig. 50a). Para conservarmos  $V_2$  em cima, à esquerda, basta aumentarmos os lados BA e DA, dando a cada um dos lados um degrau a mais, além de dar à construção uma perspectiva correta (fig. 50b).

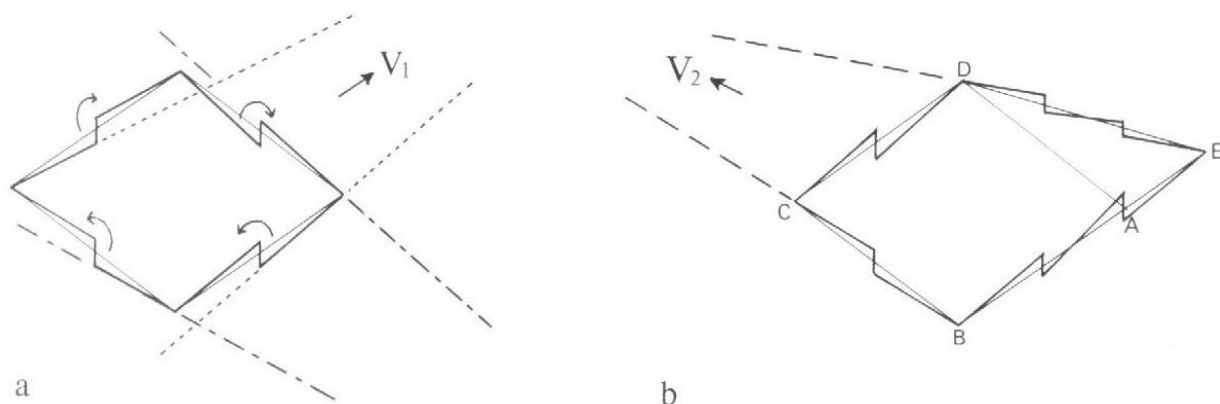


Figura 50. Mudança de um dos pontos de fuga.

Um outro ponto que promove a ilusão em *Subindo e Descendo* é a construção dos demais pormenores da figura. Enquanto a escada encontra-se em um plano horizontal, estes pormenores, como os vãos das janelas, os detalhes das colunas, etc., que deveriam estar em planos horizontais, na verdade encontram-se em uma espiral ascendente (fig. 51). Ainda, consoante Ernst (1991, p.90), “se traçarmos linhas verticais ao longo de cada degrau, notamos que estas limitam um corpo prismático, cujas superfícies laterais têm larguras que estão na relação 6:6:3:4. As partes da figura que ficam à mesma altura formam uma espiral”.

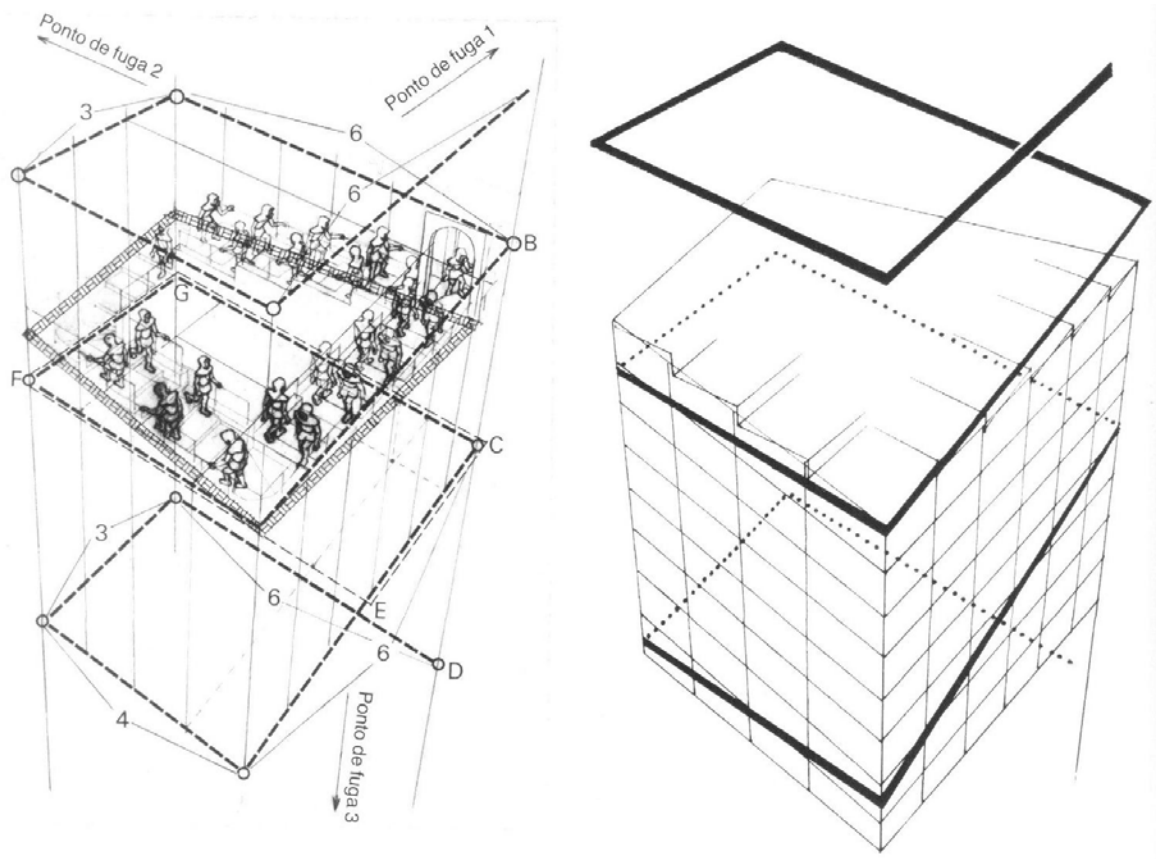


Figura 51. Planos horizontais da escada e a espiral ascendente.

## CONCLUSÃO

O intuito deste trabalho é o resgate da Matemática como componente de representação pictural. A análise do uso da Matemática em obras de arte permite-nos ver a ligação entre Arte e as Ciências Exatas, visando o caráter interdisciplinar. Escher, o artista escolhido para análise neste trabalho, percebeu esta ligação e com maestria soube por em suas obras toda sutileza, encanto e fascínio que a Matemática pode oferecer àqueles que souberem apreciá-la.

Este enfoque em um artista específico visou um estudo mais aprofundado da relação Matemática e Arte, podendo perceber a sutileza de cada detalhe, de cada pormenor presente em algumas de suas obras. Neste trabalho, não procurei abarcar toda a obra de Escher, mas, sim, ater-me a um tema específico: a questão da perspectiva. Isto com a finalidade de instigar o interesse por parte de pesquisadores, professores e alunos, a penetrar no mundo de Escher e conhecer também os outros temas do artista, tão ricos e fascinantes como este em questão.

No âmbito da Matemática o objetivo foi o estudo de técnicas de perspectiva, assim como o de figuras impossíveis, para o auxílio no estudo de figuras geométricas, sua maior compreensão, além de prover uma fonte de material para pesquisa ou até mesmo apreciação.

Por fim, venho destacar também a relevância da relação Arte/Matemática no universo acadêmico da Matemática, seja como auxílio em práticas docentes, sua aplicação em pesquisas ou o desfrute destas obras como fonte de inspiração, tanto por sua beleza, como por seu caráter singular, enigmático e fantástico.

## BIBLIOGRAFIA

AZEVEDO, Átila Anderson Dias, Escher: um artista gráfico com alma de matemático. **Theorema**. Belo Horizonte, n.1, p. 16-21, 1º semestre, 2004. disponível em <<http://www.colegiosantamarcelina.com.br/Theorema/Revista.pdf>> acesso em 4 fev. 2007.

BARISON, Maria Bernadete. **Resumo. Maria Bernadete Barison apresenta definições, classificações e exemplos de Perspectiva em Geometria Descritiva.** Geométrica Vol. 12, 2005. Disponível em <[http://www.mat.uel.br/geometrica/php/pdf/gd\\_perspectivas.pdf](http://www.mat.uel.br/geometrica/php/pdf/gd_perspectivas.pdf)> Acesso em 09 jan. 2007.

BERBAUM, K., THARP, D., & MROCZEK, K. **Depth perception of surfaces in pictures: Looking for conventions of depiction in Pandora's box.** Perception, 12, 5-20. (1983). apud FINK, Kevin. **Impossible Figures in Perceptual Psychology**, 1991. Disponível em <<http://www.fink.com/papers/impossible.html>> . Acesso em 20 jan. 2007.

BIEDERMAN, I. **Scene Perception**, Scientific American, 1987. apud FINK, Kevin. **Impossible Figures in Perceptual Psychology**, 1991. Disponível em <<http://www.fink.com/papers/impossible.html>> . Acesso em 20 jan. 2007.

BORGES, Jorge Luiz, **El Hacedor.** 1960. Disponível em <<http://asruinascirculares.weblog.com.pt/arquivo/2004/11/borges.html>>. Acesso em 10 fev. 2007.

CANOTILHO, Luís Manoel Leitão. **Perspectiva Pictórica**, Bragança, Instituto Politécnico de Bragança, 2005. Disponível em <<http://www.ipb.pt/~luiscano/Perspectivalinear/PerspectivaLinear.htm>> Acesso em 04 jan. 2007.

CARRION, Wellington. **Entendendo a perspectiva**, 2005. Disponível em [http://www.imasters.com.br/artigo/3045/teoria/entendendo\\_a\\_perspectiva/](http://www.imasters.com.br/artigo/3045/teoria/entendendo_a_perspectiva/) , acesso em 13 jan. 2007.

CATÁLOGO EXPOSIÇÃO: OBRAS DE ESCHER – EXPOSIÇÃO NO BRASIL 1993-1994

CERF, C. **A Family of Impossible Figures Studied by Knot Theory**. Disponível em <http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/cerf/#r3> . Acesso em 18 jan. 2007.

CHILVES, Ian. **The Oxford Dictionary of Art** Português. Dicionario Oxford de Artes. Tradução: Marcelo Brandão. São Paulo: M. Fontes, 2001. Apud SANTOS, Andréa Oriques. **Educação Matemática e Arte: Um Estudo da Representação em Perspectiva nas Pinturas do Renascimento**. 2006, 89 fls. Monografia (Licenciamento em Matemática). Licenciatura em Matemática. Universidade Federal de Santa Catarina.

CRATO, Nuno. Apud PEREIRA, A. 2004. Disponível em [http://vizir2.blogspot.com/2004\\_10\\_01\\_vizir2\\_archive.html](http://vizir2.blogspot.com/2004_10_01_vizir2_archive.html) . Acesso em 27 jan. 2007.

DRAPER, S. W. **The Penrose triangle and a family of related figures**. *Perception* 7, 283-296. (1978). apud CERF, C. **A Family of Impossible Figures Studied by Knot Theory**. Disponível em <http://www.mi.sanu.ac.yu/vismath/cerf/#r3> . Acesso em 18 jan. 2007.

ERNST, Bruno. **O espelho mágico de M. C. Escher**. Tradução: Maria Odete Gonçalves Koller. Berlin: Taschen. 1991.

ESCHER, Maurits Cornelis. **Gravuras e Desenhos**. Tradução. Maria Odete Gonçalves Koller. Hamburgo. Ed Taschen. 1994. Citação disponível em <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/escher/relatividade.html>>

FINK, Kevin. **Impossible Figures in Perceptual Psychology**, 1991. Disponível em <<http://www.fink.com/papers/impossible.html>> . Acesso em 20 jan. 2007.

FLORES, Cláudia Regina. **Olhar, saber, representar: ensaios sobre a representação em perspectiva**. 186p. Doutorado em Educação. Florianópolis: UFSC/SC, 2003.

GERSHON, Elber. **Escher for Real**, 2002-6. Disponível em <http://www.cs.technion.ac.il/~gershon/EscherForReal/> . Acesso em 20 jan. 2007

HOFFMAN, Donald, D. **Inteligência visual: como criamos o que vemos**. Tradução de Denise Cabral Carlos de Oliveira. Editora Campus, 2000. Apud SOUZA, Lucilene Inês Gargione de. **O Redesign da Informação no Processamento da Imagem**, 2004, 461 fls. Tese (Doutoramento em Engenharia de Produção). Faculdade de Engenharia de Produção. Universidade Federal de Santa Catarina.

[http://en.wikipedia.org/wiki/Penrose\\_stairs](http://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_stairs) Acesso em 24 jan. 2007.

<http://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective> Acesso em 16 jan. 2007

[http://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective\\_curviligne](http://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective_curviligne) Acesso em 16 jan. 2007

[http://pt.wikipedia.org/wiki/Perspectiva\\_%28gr%C3%A1fica%29](http://pt.wikipedia.org/wiki/Perspectiva_%28gr%C3%A1fica%29) Acesso em 18 jan. 2007.

[http://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo\\_de\\_Penrose](http://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Penrose) . Acesso em 20 jan. 2007.

MARTINHO, Maria Helena. **M. C. Escher – Arte e Matemática**. APM – Associação de Professores de Matemática, Lisboa, 1998.

MOREIRA, Allan. **Perspectiva Cavaleira**, 2006. Disponível em <<http://blog.orienta.com.br/2006/08/30/perspectiva-cavaleira/>> , acesso em 14 jan. 2007.

OLIVEIRA, Andréia Machado, **As Cidades de Escher**. 2005. Disponível em <<http://seer.psicologia.ufrj.br/seer/lab19/ojs/viewarticle.php?id=4&layout=html>> acesso em 27 jan. 2007.

PEREIRA, A. 2004. Disponível em <[http://vizir2.blogspot.com/2004\\_10\\_01\\_vizir2\\_archive.html](http://vizir2.blogspot.com/2004_10_01_vizir2_archive.html)> . Acesso em 27 jan. 2007.

SANTOS, Andréa Oriques. **Educação Matemática e Arte: Um Estudo da Representação em Perspectiva nas Pinturas do Renascimento**. 2006, 89 fls. Monografia (Graduação em Matemática). Licenciatura em Matemática. Universidade Federal de Santa Catarina.

SECKEL, Al, **Impossible Staircase**. 1997. Disponível em <[http://psylux.psych.tu-dresden.de/i1/kaw/diverses%20Material/www.illusionworks.com/html/impossible\\_staircase.html](http://psylux.psych.tu-dresden.de/i1/kaw/diverses%20Material/www.illusionworks.com/html/impossible_staircase.html)> . Acesso em 24 jan. 2007.

SHUCKER, Brian. **Rotating the Penrose Staircase**, 2000. Disponível em <<http://iguanaworks.net/~shucker/papers/stair.pdf>> . Acesso em 24 jan. 2007.



SOUZA, Lucilene Inês Gargione de. **O Redesign da Informação no Processamento da Imagem**, 2004, 461 fls. Tese (Doutoramento em Engenharia de Produção). Faculdade de Engenharia de Produção. Universidade Federal de Santa Catarina.

WADE, Nicholas. **Visual Alussions: Pictures of Perception**. Hove, UK. Lawrence Erlbaum Associates Ltd., 1980. Apud FINK, Kevin. Impossible Figures in Perceptual Psychology, 1991. Disponível em <<http://www.fink.com/papers/impossible.html>> . Acesso em 20 jan. 2007.

WEISSTEIN, Eric W. **Penrose Triangle**. Disponível em <<http://mathworld.wolfram.com/PenroseTriangle.html>> . Acesso em 18 jan. 2007.

## APÊNDICE

### LISTA DE FIGURAS

- Figura 1. Castrovalva, Litografia, 1930.....12  
 Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 16 dez 2006.
- Figura 2. Mão com esfera refletora, Litografia, 1935. ....12  
 Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 16 dez. 2006.
- Figura 3. Estrelas, Xilogravura, 1948. ....13  
 Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 16 dez. 2006.
- Figura 4. Esboço de Escher de um mosaico de Alhambra, 1922. ....13  
 Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 16 dez. 2006.
- Figura 5. Dia e noite, Xilogravura, 1938. ....15  
 Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 16 dez. 2006.
- Figura 6. Répteis, Litografia, 1943. ....15  
 Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 16 dez. 2006.
- Figura 7. Limite Circular III, Xilogravura, 1959. ....16  
 Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 16 dez. 2006.
- Figura 8. Mãos desenhando-se, Litografia, 1948. ....17  
 Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 16 dez. 2006.
- Figura 9. Outro mundo, Xilogravura, 1947. ....17  
 Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 16 dez. 2006.

Figura 10. Belvedere, Litografia, 1958. ....18

Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 16 dez. 2006.

Figura 11. Observador, objeto e plano do quadro. ....20

Fonte: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/Perspectiva\\_%28gr%C3%A1fica%29](http://pt.wikipedia.org/wiki/Perspectiva_%28gr%C3%A1fica%29)>. Acesso em 18 dez. 2006.

Figura 12. Projeções cônica e cilíndrica. ....20

Fonte: CANOTILHO, Luís Manoel Leitão, *Perspectiva Pictórica*, Bragança, Instituto Politécnico de Bragança, 2005, p. 50. Disponível em <<http://www.ipb.pt/~luiscano/Perspectivalinear/PerspectivaLinear.htm>>. Acesso em 04 jan. 2007.

Figura 13. Perspectivas isométrica, dimétrica e trimétrica. ....22

Fonte: <<http://www.cce.ufsc.br/~scheidt/perspectiva.html>>. Acesso em 18 dez. 2006.

Figura 14. Perspectiva cavaleira vista em ângulos de  $60^\circ$  e  $30^\circ$  respectivamente.....23

Fonte: <<http://www.cce.ufsc.br/~scheidt/perspectiva.html>>. Acesso em 18 dez. 2006.

Figura 15. Perspectiva militar.....24

Fonte:<[http://www.utadeo.edu.co/comunidades/estudiantes/ciencias\\_basicas/geometria/perspectiva\\_militar\\_12.pdf](http://www.utadeo.edu.co/comunidades/estudiantes/ciencias_basicas/geometria/perspectiva_militar_12.pdf)> . Acesso em 4 fev. 2007.

Figura 16. Perspectivas rigorosas normais paralela e oblíqua. ....26

Fonte: CANOTILHO, Luís Manoel Leitão, *Perspectiva Pictórica*, Bragança, Instituto Politécnico de Bragança, 2005, p. 50. Disponível em <<http://www.ipb.pt/~luiscano/Perspectivalinear/PerspectivaLinear.htm>>. Acesso em 04 jan. 2007.

- Figura 17. Perspectiva rigorosa vista de cima. ....27  
Fonte: CANOTILHO, Luís Manoel Leitão, Perspectiva Pictórica, Bragança, Instituto Politécnico de Bragança, 2005, p. 50. Disponível em  
<<http://www.ipb.pt/~luiscano/Perspectivalinear/PerspectivaLinear.htm>>. Acesso em 04 jan. 2007.
- Figura 18. Comparação entre a perspectiva clássica e a perspectiva curva. ....28  
Fonte:<<http://www.centraldequadrinhos.com/forum/viewtopic.php?t=6663&sid=5eaf7d41b0a5a65e6209a6b38614e826>>. Acesso em 16 jan. 2007.
- Figura 19. Linhas horizontais e de profundidade em uma perspectiva curva. ....29  
Fonte:<<http://www.centraldequadrinhos.com/forum/viewtopic.php?t=6663&sid=5eaf7d41b0a5a65e6209a6b38614e826>>. Acesso em 16 jan. 2007.
- Figura 20. Entrée de l'empereur Charles IV à Saint-Denis (Jean Fouquet, 1455-1460). ....29  
Fonte: <[http://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective\\_curviligne](http://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective_curviligne)>. Acesso em 16 jan. 2007.
- Figura 21. Um cubo. ....30  
Fonte: <<http://www.fink.com/papers/impossible.html>>. Acesso em 20 jan. 2007.
- Figura 22. Tridente bi-prolongado.....31  
Fonte: <<http://www.fink.com/papers/impossible.html>>. Acesso em 20 jan. 2007.
- Figura 23. Triângulo impossível de Penrose. ....34  
Fonte: <<http://mathworld.wolfram.com/PenroseTriangle.html>>. Acesso em 18 jan. 2007.

Figura 24. Triângulo de Penrose sob dois pontos de vista diferentes.....34  
 Fonte : <<http://www.cs.technion.ac.il/~gershon/EscherForReal/>>. Acesso em 20 jan. 2007.

Figura 25. Alternativa para a construção do Triângulo de Penrose, sob dois pontos de vista (virtual e real). .....35  
 Fonte : <<http://www.cs.technion.ac.il/~gershon/EscherForReal/>>. Acesso em 20 jan. 2007.

Figura 26. Triângulo Impossível criado por Mathieu Hamaekers. ....35  
 Fonte : <<http://im-possible.info/english/articles/real/>>. Acesso em 20 jan. 2007.

Figura 27. Foto de um triângulo impossível por Bruno Ernst.....36  
 Fonte : <<http://im-possible.info/english/articles/real/>>. Acesso em 20 jan. 2007.

Figura 28. A escada de Penrose. ....37  
 Fonte: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Impossible\\_staircase.svg](http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Impossible_staircase.svg)>. Acesso em 24 jan. 2007.

Figura 29. Escada de Penrose sob dois pontos de vista diferentes. ....38  
 Fonte: <<http://www-vrl.umich.edu/intro/penrose.html>>. Acesso em 24 jan. 2007.

Figura 30. Escada de Penrose e seus níveis. ....38  
 Fonte: <<http://iguanaworks.net/~shucker/papers/stair.pdf>>. Acesso em 24 jan. 2007.

Figura 31.a) Torre de Babel, Xilogravura, 1928. b)Ex-líbris, Xilogravura, 1947.....40  
 Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 27 jan. 2007.

Figura 32.a)Um outro mundo I, Gravura, 1946. b) Um outro mundo II, Xilogravura, 1947.....41

Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 27 jan. 2007.

Figura 33. Relatividade, Litografia, 1953.....42

Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 27 jan. 2007.

Figura 34. Estudo para Relatividade com três pontos de fuga, lápis, 1953. ....43

Fonte: ERNST, Bruno. O espelho mágico de M. C. Escher. Tradução: Maria Odete Gonçalves Koller. Berlin: Taschen. 1991.

Figura 35. Efeito das linhas telegráficas. ....44

Fonte: ERNST, Bruno. O espelho mágico de M. C. Escher. Tradução: Maria Odete Gonçalves Koller. Berlin: Taschen. 1991.

Figura 36. Deslocamento visual quadro-a-quadro. ....45

Fonte: ERNST, Bruno. O espelho mágico de M. C. Escher. Tradução: Maria Odete Gonçalves Koller. Berlin: Taschen. 1991.

Figura 37. Projeção cônica das linhas telegráficas. ....46

Fonte: ERNST, Bruno. O espelho mágico de M. C. Escher. Tradução: Maria Odete Gonçalves Koller. Berlin: Taschen. 1991.

Figura 38. Em cima e embaixo, Litografia, 1947. ....47

Fonte:<[http://www.artchive.com/artchive/E/escher/escher\\_up\\_and\\_down.jpg.html](http://www.artchive.com/artchive/E/escher/escher_up_and_down.jpg.html)>. Acesso em 30 jan. 2007.

Figura 39. Linhas verticais e horizontais no corpo de um cilindro. ....48

Fonte: ERNST, Bruno. O espelho mágico de M. C. Escher. Tradução: Maria Odete Gonçalves Koller. Berlin: Taschen. 1991.

Figura 40a) Escadaria, Litografia, 1995.b) Linhas verticais e horizontais utilizadas em Escadaria.....49

Fonte: a) <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 04 fev. 2007.

b) ERNST, Bruno. O espelho mágico de M. C. Escher. Tradução: Maria Odete Gonçalves Koller. Berlin: Taschen. 1991.

Figura 41. Belvedere, Litografia, 1958.....51

Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 04 fev. 2007.

Figura 42. Maquete de Belvedere, sob dois pontos de vista distintos.....52

Fonte: <<http://www.cs.technion.ac.il/~gershon/EscherForReal/>>. Acesso em 4 fev. 2007.

Figura 43. Pormenor de Belvedere.....53

Fonte: ERNST, Bruno. O espelho mágico de M. C. Escher. Tradução: Maria Odete Gonçalves Koller. Berlin: Taschen. 1991.

Figura 44. A “grade louca”, fotografada pelo Dr. Cochran, Chicago.....53

Fonte: <<http://www.carla146.it/07documenti/pagine/pageart1903.htm>>. Acesso em 4 fev. 2007.

Figura 45. Maquete do cubo impossível sob dois pontos de vista distintos.....54

Fonte: <<http://www.cs.technion.ac.il/~gershon/EscherForReal/>>. Acesso em 4 fev. 2007.

Figura 46. Queda de Água, Litografia, 1961. ....55

Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 04 fev. 2007.

Figura 47. Maquete de Queda de Água sob dois pontos de vista e indicação do triângulo impossível.....56

Fonte: <<http://www.cs.technion.ac.il/~gershon/EscherForReal/>>. Acesso em 4 fev. 2007.

Figura 48. Subindo e Descendo, Litografia, 1960.....57

Fonte: <[www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)>. Acesso em 04 fev. 2007.

Figura 49. Construção de uma escada infinita.....58

Fonte: ERNST, Bruno. O espelho mágico de M. C. Escher. Tradução: Maria Odete Gonçalves Koller. Berlin: Taschen. 1991.

Figura 50. Mudança de um dos pontos de fuga. ....58

Fonte: ERNST, Bruno. O espelho mágico de M. C. Escher. Tradução: Maria Odete Gonçalves Koller. Berlin: Taschen. 1991.

Figura 51. Planos horizontais da escada e a espiral ascendente. ....59

Fonte: ERNST, Bruno. O espelho mágico de M. C. Escher. Tradução: Maria Odete Gonçalves Koller. Berlin: Taschen. 1991.